

УДК: 577.95

## Неопределенность при моделировании экосистемы озера

Пахт Е.В.<sup>\*1</sup>, Абакумов А.И.<sup>\*\*2</sup>

<sup>1</sup>ФГОУ ВПО Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет, Владивосток, 690087, Россия

<sup>2</sup>Учреждение Российской академии наук Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, 690041, Россия

**Аннотация.** Особенностью знаний о природной экологической системе является неопределенность данных о ее состоянии и функционировании. Неопределенность носит принципиальный характер ввиду сложности и качественной разнообразности системы. Математические модели должны учитывать эту неопределенность как в используемых данных, так и в результатах. Соответствующее модельное описание реализуется на примере экосистемы мелкого эвтрофного озера.

**Ключевые слова:** математическая модель, водная экосистема, неопределенность, динамика биомасс, устойчивость.

### ВВЕДЕНИЕ

При моделировании водных экологических систем приходится постоянно сталкиваться с проблемой неточности экспериментальной информации. Частично это связано с невозможностью точных измерений (чтобы узнать, сколько рыб в море, надо его вычерпать и посчитать оставшееся), но зачастую неточность имеет более принципиальный характер, связанный с уровнем изученности биологических процессов. Если при теоретическом исследовании биологических систем для уточнения знаний надо уточнять исходную информацию, то при модельном описании водной экосистемы для количественной оценки ее динамики можно довольствоваться некоторым уровнем неопределенности, но желательно отслеживать его в процессе расчетов. Использование нечетких множеств для описания неопределенностей в биологических системах было предложено Л. Заде [1], с тех пор это направление достаточно интенсивно развивается. В динамических моделях подобные описания можно строить, как мы предлагаем, на основе описания динамики функции принадлежности [2].

В настоящей работе математические модели применены к небольшому озеру Большой Окуенок в Ленинградской области. Об этом озере опубликована достаточно полная количественная информация [3, 4]. Использовались подходы к моделированию водных экосистем, учитывающие неопределенность данных. При этом учет неопределенности приобретает вид надстройки над основной моделью обычного вида [2]. Основная модель описывает динамику масс выделенных блоков экосистемы, имеет вид системы дифференциальных уравнений. А затем над ней надстраивается описание динамики с учетом неопределенности [5]. Обычно для повышения

\* st-francis@mail.ru

\*\* abakumov@iacp.dvo.ru

достоверности модельных описаний мы используем серию согласованных моделей [6]. В данном случае применяются четыре модели.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Модели экосистемы основаны на системах дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

( $\dot{x}$  обозначает производную по времени  $t$ ). Состояние экосистемы описывается  $n$ -мерным вектором  $x$ , компоненты которого представляют собой массы соответствующих блоков. Предполагаем, что решение системы уравнений (1) существует и единственно для всех неотрицательных значений  $t$  при неотрицательном векторе начальных условий.

Вводим неотрицательную функцию принадлежности  $\varphi(t, x)$ , которая показывает уровень уверенности в том, что состояние системы в момент времени  $t$  соответствует вектору  $x$  характеристик. Чем больше  $\varphi(t, x)$ , тем в большей степени вектор  $x$  описывает состояние экосистемы в момент времени  $t$  [1]. Тогда на основе системы (1) функция принадлежности будет вычисляться по формуле

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\chi(0, t, x)) \cdot \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} f(\tau, \chi(\tau, t, x)) d\tau\right). \quad (2)$$

Эта формула следует из формулы Лиувилля [7] на основе условия о сохранении неизменного общего уровня неопределенности в процессе динамики системы согласно системе уравнений (1) [2, 5]. Общий уровень неопределенности полагается равным интегралу функции  $\varphi$  по всему множеству возможных значений вектора  $x$ . Функция  $\chi(t, \tau, x_\tau)$  означает решение системы уравнений (1) при начальных условиях  $x(\tau) = x_\tau$ . Функция  $\varphi_0(x)$  обозначает функцию принадлежности в начальный момент времени  $t = 0$ . Наше понимание неопределенности состояния системы основано на формуле (2).

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ЭКОСИСТЕМЫ ОЗЕРА БОЛЬШОЙ ОКУНЕНОК

Основная часть информации об озере почерпнута из статей [3, 4]. Озеро Большой Окуненок расположено в Лужском районе Ленинградской области (заказник «Сяберский»), эксплуатировалось в качестве питомника для подращивания мальков карпа и сиговых рыб – пеляди и пелчира. Географические координаты центра озера: 58°48'22" N, 29°5'50" E. Физико-географическая характеристика: площадь водной поверхности – 0.058 кв. км, средняя глубина – 2 м, максимальная глубина – 3 м. Озеро Большой Окуненок относится к разряду высокотрофных водоемов [3].

В рассматриваемой экосистеме учтено 36 компонентов. Это две группы бактерий (одиночные и агрегированные, в том числе входящие в состав детрита), четыре размерные группы потребляемого фитопланктона, синезеленые водоросли (цианобактерии), инфузории и коловратки разных трофических предпочтений, хищный и нехищный зоопланктон, включающий различные виды ракообразных разных размеров и стадий развития, личинки комаров разных видов и стадий развития, бентос среднего размера (хищный и нехищный), макробентос. Учтены три вида мальков рыб и взрослые рыбы: карп и сиговые рыбы – пелядь и пелчир. Фигурируют также взвешенный и донный детрит, растворенное в воде органическое вещество (РОВ). Все достаточно детализированные данные использованы в нижеследующих моделях, но сами модели сильно агрегированы. Подобный подход в моделировании имеет свои обоснования [8]. А именно, вместо разработки сложной, детализированной, имитационной модели будем использовать серию взаимосвязанных компактных

моделей аналитического вида. Эти модели по-разному используют исходную информацию и по-разному представляют объект моделирования, что повышает эффективность моделирования.

Рассмотрены четыре согласованных между собой модели. Согласование моделей осуществлено на этапах определения их структур (структурное согласование) и определения численных значений параметров по известной информации об объекте моделирования (параметрическое согласование). Во всех моделях время измеряется в сутках, плотности масс (биомасс) блоков – в  $\text{ккал}/\text{м}^2$ .

В первых двух моделях из живых компонент выделяются блоки рыб и всех остальных.

**Первая модель** отражает иерархию организмов экосистемы: выделены самые крупные ее представители – рыбы, остальные компоненты поделены на живые и «неживые». В схеме потоков вещества фитопланктон разного размера, синезеленые водоросли, две группы бактерий, две группы мелких коловраток, науплии ракообразных, две размерные группы циклопов, диаптомусы, мелкие клadoцеры, две размерные группы дафний, пять групп макробентоса ( $x_1$ ) представлены одним блоком (на основе имеющихся данных о биомассах за 1986 год [3]). Некоторые из указанных выше компонент не включены в блок, так как не были обнаружены. Объединены три вида рыб ( $x_2$ ). К «неживым» компонентам отнесены детрит, РОВ и биогены. Разнокачественный детрит (донный и взвешенный) объединен с РОВ и биогенными элементами ( $x_3$ ) – минеральными веществами на основе углерода, кремния, фосфора и азота, участвующими в образовании органического вещества в процессе фотосинтеза. Таким образом, пресноводная экосистема представляется основными блоками сообществ близких видов и совокупности близких по свойствам веществ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_{31}(x_3) \cdot x_1 - v_{12}(x_1) \cdot x_2 - m_1(x_1) \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(x_1) \cdot x_2 + k_{23} \cdot v_{32}(x_3) \cdot x_2 - m_2(x_2) \cdot x_2, \\ \dot{x}_3 = (1 - k_{12}) \cdot v_{12}(x_1) \cdot x_2 + (1 - k_{23}) \cdot v_{32}(x_3) \cdot x_2 + \\ + m_1(x_1) \cdot x_1 + m_2(x_2) \cdot x_2 - v_{31}(x_3) \cdot x_1 - v_{32}(x_3) \cdot x_2. \end{cases} \quad (\text{M1})$$

Трофические функции скорости выедания блока  $i$  на единицу биомассы блока  $j$  обозначены  $v_{ij}(x_i)$ , доля  $k_{ij}$  этой выеденной биомассы, идет на рост хищника, т. е. на образование продукции блоком  $j$ . Такие же функции применяются для описания потребления РОВ и детрита планктоном, а также для описания потребления биогенов фитопланктоном при фотосинтезе. Функции  $m_i(x_i)$  – удельные скорости отмирания.

**Вторая модель** сосредоточена на живой составляющей экосистемы. По сравнению с первой моделью убран блок «неживых» компонент. Модель принимает простой вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = q(x_1) - v_{12}(x_1) \cdot x_2 - m_1(x_1) \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(x_1) \cdot x_2 - m_2(x_2) \cdot x_2. \end{cases} \quad (\text{M2})$$

Последние две модели варьируют описание живых компонент.

**Третья модель.** Общей закономерностью для водных экосистем является существование двух главных путей переноса энергии – «планктонный» (фитопланктон – нехищный зоопланктон – хищный зоопланктон – рыбы) и «детритно-бактериальный» (отмирающие остатки организмов – детрит – растворенное органическое вещество – микрофлора) [3]. Третья модель отражает «планктонный» путь, получена следующим преобразованием: из первого блока первой модели выделены фитопланктон и синезеленые водоросли, образующие блок ( $y_1$ ), остальные компоненты объединены в блок ( $y_2$ ), три вида рыб образуют блок ( $y_3$ ).

Разнокачественный детрит, РОВ и биогенные элементы, фигурирующие в первой модели, не рассматриваются. Модель имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = q(y_1) - v_{12}(y_1) \cdot y_2 - m_1(y_1) \cdot y_1, \\ \dot{y}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(y_1) \cdot y_2 - v_{23}(y_2) \cdot y_3 - m_2(y_2) \cdot y_2, \\ \dot{y}_3 = k_{23} \cdot v_{23}(y_2) \cdot y_3 - m_3(y_3) \cdot y_3. \end{cases} \quad (M3)$$

**Четвертая модель.** Так как среди рыб, образующих блок ( $y_3$ ), только в рацион пеляди входят синезеленые водоросли, то эта трофическая связь не была включена в модель М3. Если же ее включить в рассмотрение, то с учетом того, что пелядь составляет 14.5% биомассы блока ( $y_3$ ) и синезеленые водоросли – 15% биомассы блока ( $y_1$ ), в первое и третье уравнения модели М3 добавляются слагаемые, соответствующие перетоку энергии из блока ( $y_1$ ) в блок ( $y_3$ ). Получаем следующую модификацию третьей модели М3:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = q(y_1) - v_{12}(y_1) \cdot y_2 - v_{13}(y_1) \cdot y_3 - m_1(y_1) \cdot y_1, \\ \dot{y}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(y_1) \cdot y_2 - v_{23}(y_2) \cdot y_3 - m_2(y_2) \cdot y_2, \\ \dot{y}_3 = k_{13} \cdot v_{13}(y_1) \cdot y_3 + k_{23} \cdot v_{23}(y_2) \cdot y_3 - m_3(y_3) \cdot y_3. \end{cases} \quad (M4)$$

Во всех моделях предполагаются одинаковые свойства функций. Трофические функции  $v(x)$  и функции роста биомассы  $q(x)$  в соответствии с их общими свойствами [8] предполагаются неотрицательными и равными нулю в нуле, строго возрастающими, вогнутыми. Возрастание не очень велико:  $v(x)/x$  и  $q(x)/x$  – уже убывающие функции. Общеупотребительный пример таких функций:  $v(x) = v^{(0)} \cdot g(x, x_0)$ ,  $q(x) = q^{(0)} \cdot g(x, x_0)$ , где  $g(x, x_0) = x/(x_0 + x)$  – известная зависимость Моно [9] для описания процессов потребления веществ. Функции удельной естественной смертности предполагаются постоянными:  $m(x) = m^{(0)}$ , что тоже находится в рамках традиций [8].

Под равновесными решениями мы понимаем решения со стационарными по времени характеристиками.

Модель М1 описывает идеализированную замкнутую по веществу систему. Такая количественная замкнутость означает, что сумма правых частей дифференциальных уравнений М1 равна нулю. Отсюда следует, что множество неотрицательных равновесий континуально, оно состоит из нескольких однопараметрических многообразий с одной или двумя нулевыми координатами и одного однопараметрического многообразия с положительными координатами (с параметром  $x_1$ , меняющимся на некотором интервале положительных значений). В остальных моделях имеются конечные множества неотрицательных равновесий, среди которых имеется не более одного положительного.

Устойчивость (локальная или асимптотическая) этих равновесий зависит от конкретики численных значений параметров.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Для первых двух моделей коэффициенты  $v^{(0)}$  и  $q^{(0)}$  в функциях скоростей выедания вычислены из известных долей жертв в рационе хищника, а также известных среднесезонных суммарных плотностей биомасс. Предположим, что средние оценки плотностей масс блоков [3, таблица № 6] определяют равновесное состояние экосистемы: бактерии – 2.8, фитопланктон – 14.7, зоопланктон – 7.1, бентос – 0.6, рыбы – 15.8, детрит взвешенный – 143.0, детрит донный – 504.6 (единицы измерения –

ккал/м<sup>2</sup>). Тогда неизвестные коэффициенты  $v^{(0)}$ ,  $q^{(0)}$  и параметры смертности  $m^{(0)}$  вычисляются из условий равновесия системы.

Сезонное значение коэффициентов  $k$  использования ассимилированной энергии на рост вычислено как отношение среднесезонных суточных значений продукции  $P$  рыб к ассимилированной энергии  $uC$ , где  $C$  – поступившая энергия,  $u$  – коэффициент усвоения пищи. Значения  $P$  и  $C$  взяты из таблицы 6 работы [3] об элементах энергетического баланса рассматриваемой экосистемы за вегетационный сезон 1986 года. Значение коэффициента усвоения пищи  $u$  для рыб считали равным 0.8 [10], а для мирного зоопланктона – 0.6 [11].

Значения скоростей потребления планктона и детрита рыбами подбирались с учетом матрицы сезонных поступлений энергии в трофические группы из разных источников (доли жертв в рационе хищника) [3, таблица 9].

**Таблица 1.** Параметры для модели М1

Обозначение	Экологический или физический смысл	Значение
	<b>Максимальная скорость:</b>	
$v_{31}^{(0)}$	потребления РОВ и детрита планктоном и бентосом	$7.757 \cdot 10^{-3}$
$v_{32}^{(0)}$	потребления РОВ и детрита рыбами	$4.611 \cdot 10^{-4}$
$v_{12}^{(0)}$	потребления планктона и бентоса рыбами	$8.387 \cdot 10^{-4}$
	<b>Доля выеденной биомассы:</b>	
$k_{12}$	планктона и бентоса, идущая на рост всех видов рыб	0.341
$k_{23}$	детрита и РОВ, идущая на рост рыб	0.341
	<b>Коэффициент смертности:</b>	
$m_1^{(0)}$	всех видов планктона	$4 \cdot 10^{-2}$
$m_2^{(0)}$	всех видов рыб	$4 \cdot 10^{-3}$

**Таблица 2.** Параметры модели М2 в соответствии с параметрами модели М1

Обозначение	Экологический или физический смысл	Значение
	<b>Максимальная скорость:</b>	
$q^{(0)}$	роста всех видов планктона и бентоса	5.931
$v_{12}^{(0)}$	потребления планктона и бентоса рыбами	0.058
$k_{12}$	Доля ассимилированной энергии, идущая на рост биомассы рыб	0.341
	<b>Коэффициент смертности:</b>	
$m_1^{(0)}$	всех видов планктона и бентоса	$4 \cdot 10^{-2}$
$m_2^{(0)}$	всех видов рыб	$4 \cdot 10^{-3}$

Для третьей модели М3 значения коэффициентов смертности  $m^{(0)}$  вычислены из условия равновесности наблюдаемого состояния системы и условия равенства удельной смертности модели М2 и средней взвешенной удельных смертностей модели М3.

**Таблица 3.** Параметры модели М3 в соответствии с параметрами моделей М1 и М2

Обозначение	Экологический или физический смысл	Значение
	<b>Максимальная скорость:</b>	
$q^{(0)}$	роста фитопланктона и синезеленых водорослей	9.922
$v_{12}^{(0)}$	потребления фитопланктона остальными видами планктона и бентосом	0.617
$v_{23}^{(0)}$	потребления бактерио-, зоопланктона и бентоса рыбами	0.058
	<b>Доля выеденной биомассы:</b>	
$k_{12}$	фитопланктона и синезеленых водорослей, идущая на рост остальных видов планктона и бентоса	0.385
$k_{23}$	бактерио-, зоопланктона и бентоса, идущая на рост рыб	0.341
	<b>Коэффициент смертности:</b>	
$m_1^{(0)}$	фитопланктона и синезеленых водорослей	$4.7 \cdot 10^{-2}$
$m_2^{(0)}$	бактерио-, зоопланктона и бентоса	$3.02 \cdot 10^{-2}$
$m_3^{(0)}$	всех видов рыб	$4 \cdot 10^{-3}$

**Таблица 4.** Параметры модели М4 в соответствии с параметрами моделей М1, М2, М3

Обозначение	Экологический или физический смысл	Значение
	<b>Максимальная скорость:</b>	
$q^{(0)}$	роста фитопланктона и синезеленых водорослей	9.669
$v_{12}^{(0)}$	потребления фитопланктона и синезеленых водорослей остальными видами планктона и бентосом	0.578
$v_{13}^{(0)}$	потребления синезеленых водорослей рыбами	0.01
$v_{23}^{(0)}$	потребления бактерио-, зоопланктона и бентоса рыбами	0.048
	<b>Доля выеденной биомассы:</b>	
$k_{12}$	фитопланктона и синезеленых водорослей, идущая на рост остальных видов планктона и бентоса	0.385
$k_{23}$	бактерио-, зоопланктона и бентоса, идущая на рост рыб	0.341
$k_{13}$	синезеленых водорослей, идущая на рост рыб	0.341
	<b>Коэффициент смертности:</b>	
$m_1^{(0)}$	фитопланктона и синезеленых водорослей	$4.7 \cdot 10^{-2}$
$m_2^{(0)}$	бактерио-, зоопланктона и бентоса	$3.02 \cdot 10^{-2}$
$m_3^{(0)}$	всех видов рыб	$4 \cdot 10^{-3}$

Многообразие неотрицательных равновесных решений в модели М1 описаны выше. В остальных моделях их можно указать конкретно. Модель М2 имеет два неустойчивых равновесия  $x_1^* = (0; 0)$  и  $x_2^* = (48.3; 0)$  типа седловых точек и устойчивый фокус  $x_3^* = (25.3; 15.8)$ . В трехмерной модели М3 есть три неустойчивые точки  $y_1^* = (0; 0; 0)$ ,  $y_2^* = (152.7; 0; 0)$ ,  $y_3^* = (8.5; 11.0; 0)$  и одна устойчивая  $y_4^* = (14.7; 10.5; 15.8)$ . В модели М4 обнаружены три неустойчивые точки  $y_1^* = (0; 0; 0)$ ,  $y_2^* = (147.4; 0; 0)$ ,  $y_4^* = (14.7; 10.5; 15.8)$  и две устойчивые  $y_3^* = (9.2; 11.2; 0)$ ,  $y_5^* = (14.7; 0; 623.3)$ .

Если говорить только о положительных равновесиях, то в модели М1 есть одномерное многообразие таких равновесий, а в остальных моделях – по одному равновесному решению. Положительное равновесие устойчиво в моделях М2 и М3, но неустойчиво в модели М4.

Далее проводятся сравнительные расчеты для функции принадлежности по формуле (2) на системе уравнений (1) соответствующей модели. Для заданного начального состояния задаем эллипсоид (или эллипс), на котором определяем ненулевые значения начальной функции  $\varphi_0(x)$  принадлежности в виде параболоида с максимумом в точке начальных условий. Результатом расчетов является функция принадлежности  $\varphi(t, x)$ , вычисленная по формуле (2).

Сделаны расчеты функции принадлежности для всех моделей. В следующих двух разделах результаты представлены на рисунках в двух вариантах. В двумерном случае изображены множества положительных значений функции принадлежности в плоскости переменных «плотность биомассы планктона и бентоса» по горизонтальной оси, «плотность биомассы рыб» – по вертикальной оси. Причем значения функции принадлежности тем больше, чем насыщеннее точки.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для иллюстрации динамических свойств решений в моделях выбираем различные начальные состояния и проводим сравнение решений во всех моделях.

В модели М1 выбраны несколько начальных состояний и построены траектории движения функции принадлежности. Для модели (1) во всех случаях траектории стремятся к кривой положительных равновесий. Соответствующие равновесия на кривой асимптотически устойчивы (рис. 1).

В модели М2 также выбраны несколько начальных состояний системы. Из всех начальных состояний решение стремится к асимптотически устойчивому равновесному решению  $x^* = x_3^* = (25.3; 15.8)$ , которое лежит на линии положительных равновесий модели М1 (рис. 2). Из некоторых начальных состояний множество положительных значений функции принадлежности сначала движется к сепаратрисе (линия  $(x_2^*, x_3^*)$ ), а затем вдоль нее – к равновесию  $x_3^*$ . Для других начальных состояний реализуются спиралевидные движения, как и положено для фокуса.

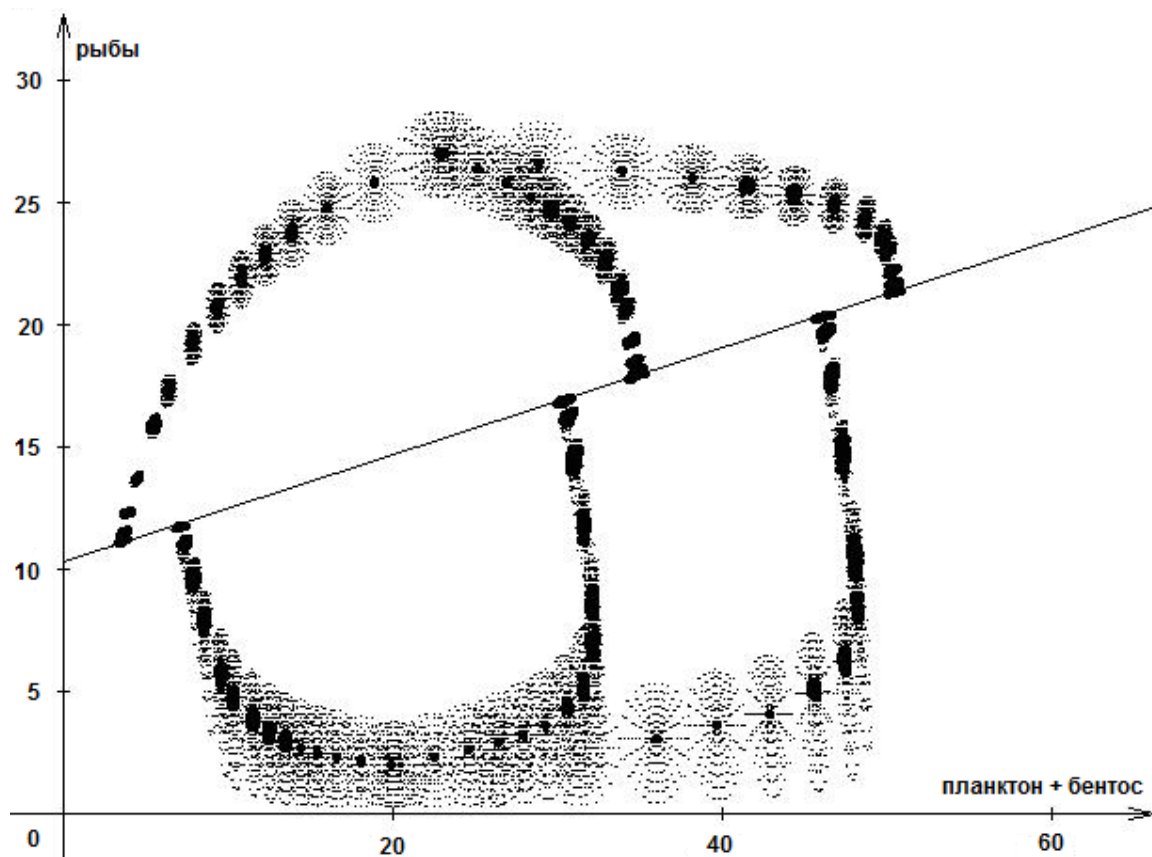


Рис. 1. Точки ненулевых значений функции принадлежности  $\varphi(t, x)$  для первой модели M1.

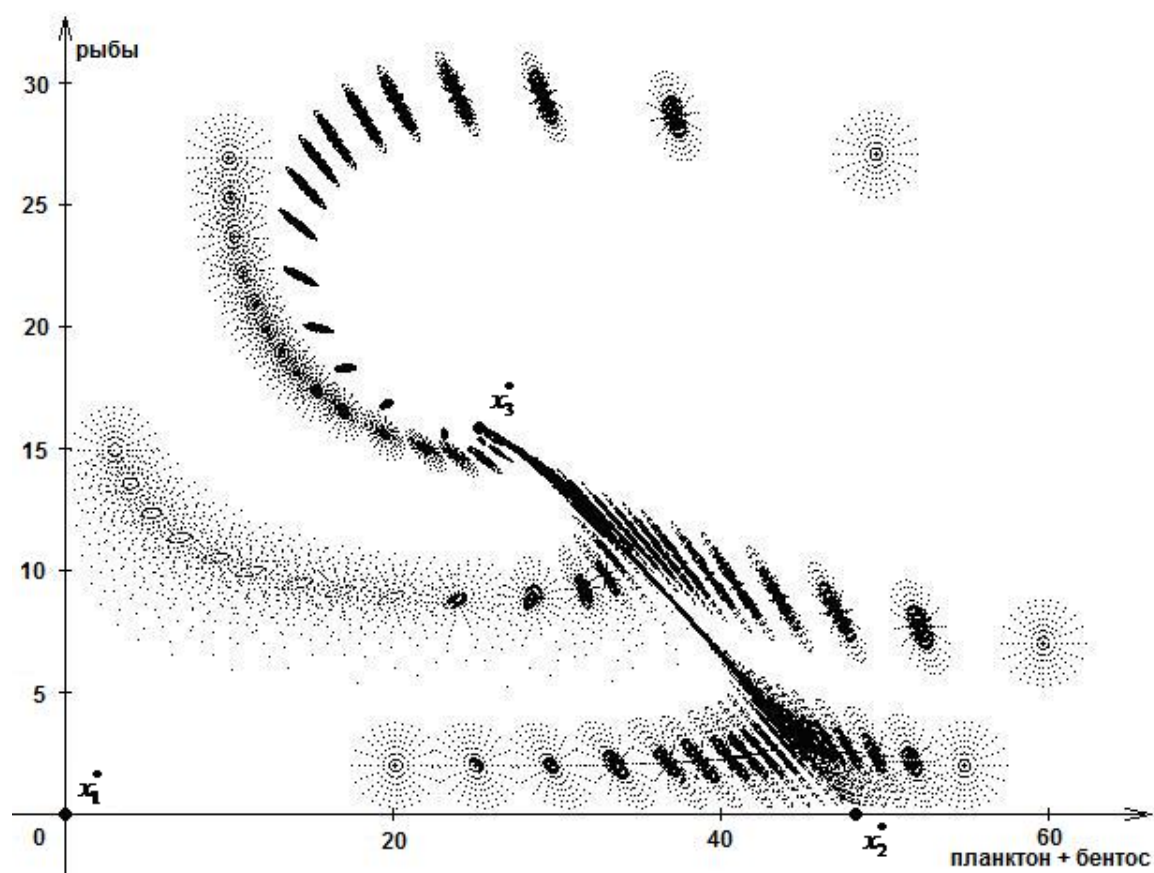


Рис. 2. Точки ненулевых значений функции принадлежности  $\varphi(t, x)$  для второй модели M2.



Подобное спиралевидное движение к устойчивому положительному равновесию наблюдается и в модели М3 (рис. 3). Устойчивое положительное равновесие  $y^* = (14.7; 10.5; 15.8)$  в модели М3 совпадает (с учетом соответствий между фазовыми переменными) с равновесием  $x^* = (25.3; 15.8)$  модели М2.

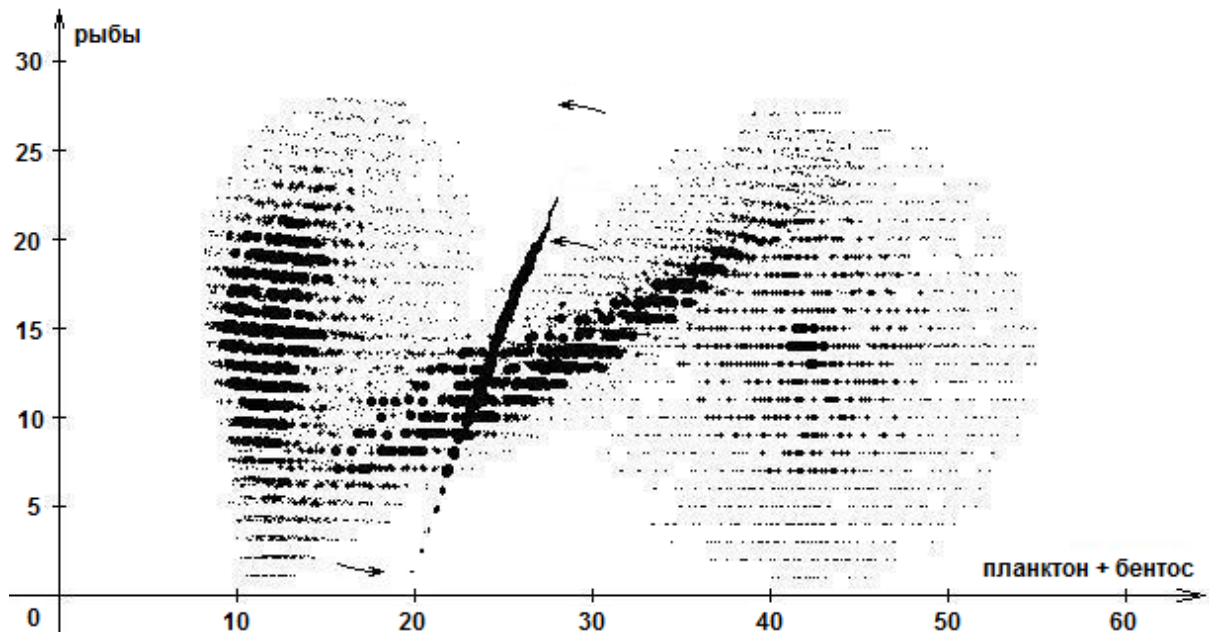
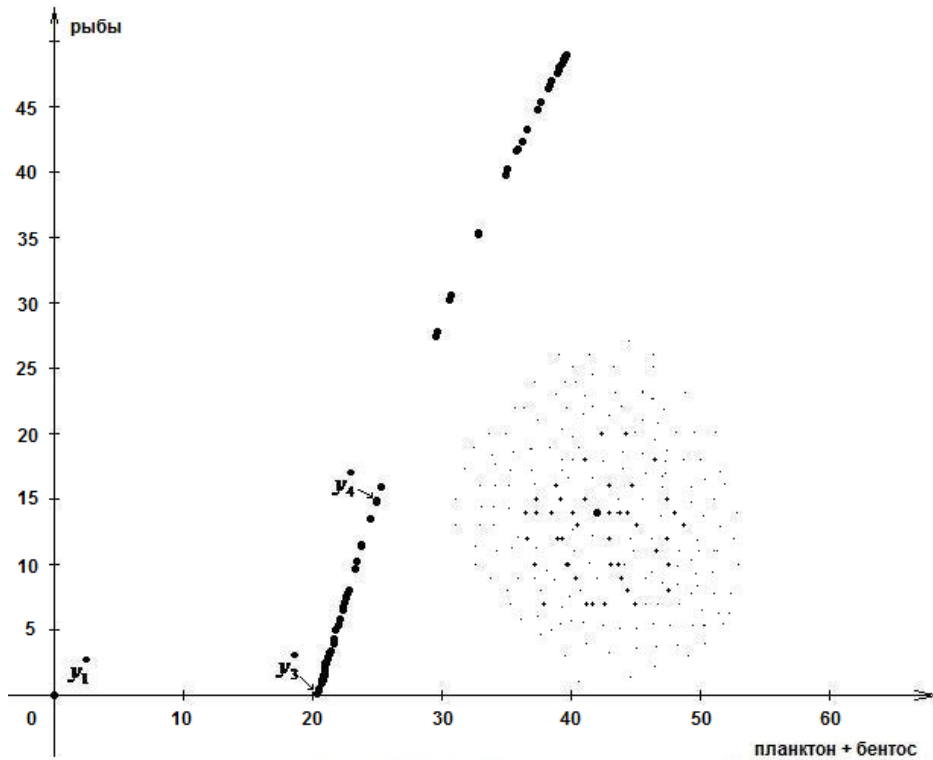


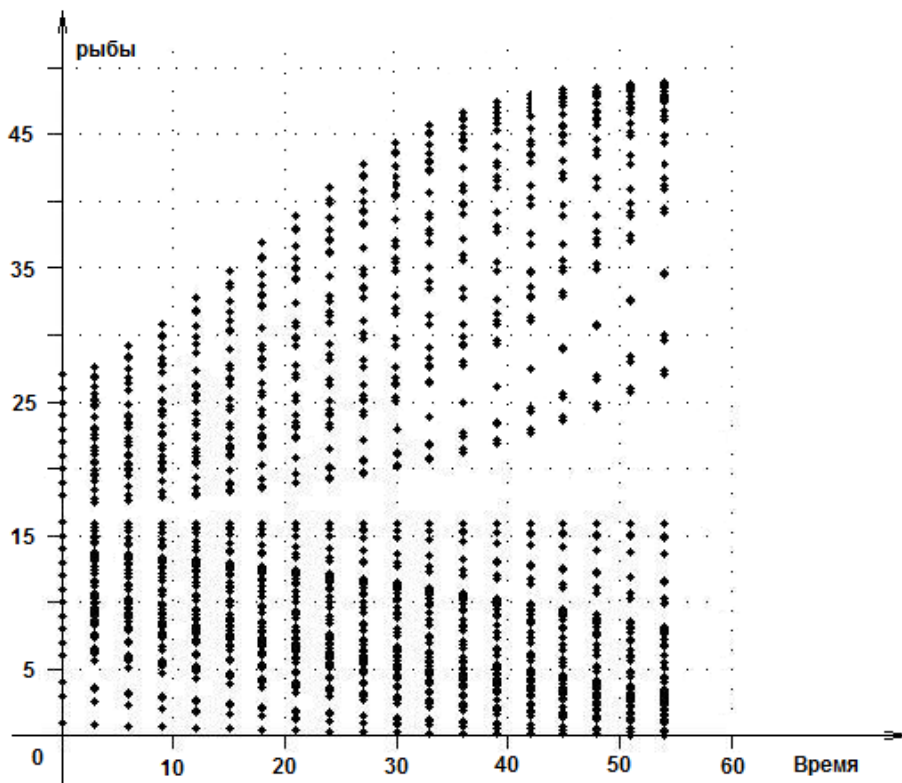
Рис. 3. Точки ненулевых значений функции принадлежности  $\varphi(t, x)$  для третьей модели М3. Координаты центра начального множества  $(24.9; 18.1; 14)$ . Проекция начального эллипсоида положительных значений функции принадлежности указана справа. Стрелками показаны направления смещения образа эллипсоида во времени.

В модели М4 два асимптотически устойчивых равновесных решения  $y_3^* = (9.2; 11.2; 0)$  и  $y_5^* = (14.7; 0; 623.3)$ . Оба эти равновесия вырождены в смысле обнуления биомасс блоков. Второе из этих равновесий имеет неестественное значение плотности биомассы рыб. Модель имеет также неустойчивое положительное равновесие  $y_4^* = (14.7; 10.5; 15.8)$ . Это приводит к тому, что начальное множество положительных значений функции принадлежности вблизи положительного равновесия со временем «разваливается» на две части (рис. 4). Каждая из частей движется к одному из устойчивых равновесий. Таким образом, система вырождается. Но расчеты показывают, что время этого вырождения велико (около сотни лет).

Вообще, времена движения множеств положительных значений функции принадлежности в этих расчетах велики во всех четырех моделях. Например, в модели М4 близкое к асимптотическому состояние проявляется за десятки тысяч суток (рис. 5). Поскольку мы не учитываем сезонные и межгодовые изменения среды, то наши расчеты имеют значение качественной оценки состояний системы. С этой точки зрения устойчивость равновесных решений не имеет решающего значения: в модели М3 равновесие устойчиво, а в модели М4 неустойчиво, но из-за слабой устойчивости или неустойчивости роли этих равновесий не сильно отличаются. Дополнительно картина «смазывается» неопределенностью траекторий, что приводит к более мягким характеристикам динамических свойств решений по сравнению с решениями в моделях без неопределенностей.



**Рис. 4.** Точки ненулевых значений функции принадлежности  $\varphi(t, x)$  для четвертой модели М4. Координаты центра начального множества (24.9;18.1;14). Финальные состояния составили кривую из жирных точек.



**Рис. 5.** Точки ненулевых значений функции принадлежности  $\varphi(t, x)$  для четвертой модели М4 в координатных осях «время – плотность биомассы рыб». Координаты центра начального множества (24.9;18.1;14). Время указано в тыс. суток.

В модели М4 положительное равновесие неустойчиво, а два других неотрицательных – устойчивы. При учете неопределенности это приводит к медленному «распаду» начального односвязного множества положительных значений функции принадлежности на два непересекающихся множества. Разделение начинается в первые 2–3 года, но на рис. 5 для наглядности показано асимптотическое поведение решения - для больших времен порядка 150 лет. Этот факт иллюстрирует тезис о важной роли учета неопределенности в исследовании динамики биологических систем.

### МНОГОМОДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭКОДИНАМИКИ ЭКОСИСТЕМЫ ОЗЕРА БОЛЬШОЙ ОКУНЕНОК ВБЛИЗИ НАБЛЮДАЕМОГО СОСТОЯНИЯ

Для согласованного анализа состояния экосистемы четырьмя моделями мы ориентировались на наблюдавшееся в 1986 году состояние, в котором суммарная плотность биомассы планктона и бентоса составляет  $25.3 \text{ ккал/м}^2$ , а рыб –  $15.8 \text{ ккал/м}^2$  [3, 4]. Параметры в моделях выбраны так, что это состояние является равновесием во всех моделях. Для анализа динамических свойств решений вблизи этого равновесия выберем в качестве центра начальных состояний не очень далекую точку с суммарной плотностью биомассы планктона и бентоса в  $23 \text{ ккал/м}^2$ , а рыб – в  $8 \text{ ккал/м}^2$ . Во всех моделях выбраны эллипсоиды начальных положительных значений функции принадлежности с центрами в начальном состоянии и полуосями в  $j$  центральных значений. Начальные функции принадлежности на эллипсоидах представляют собой параболоиды с максимальными значениями в центрах и нулевыми – на границах эллипсоидов.

Расчеты проводим по формуле (2) на каждой системе дифференциальных уравнений для соответствующей модели. Подобный анализ с применением нескольких моделей, но без учета неопределенностей, применялся нами при моделировании ихтиоценоза озера Ханка [12, 13]. Применение нечетких множеств может существенно изменить результаты, как это следует из приведенных ниже расчетных примеров для озера Большой Окуненок.

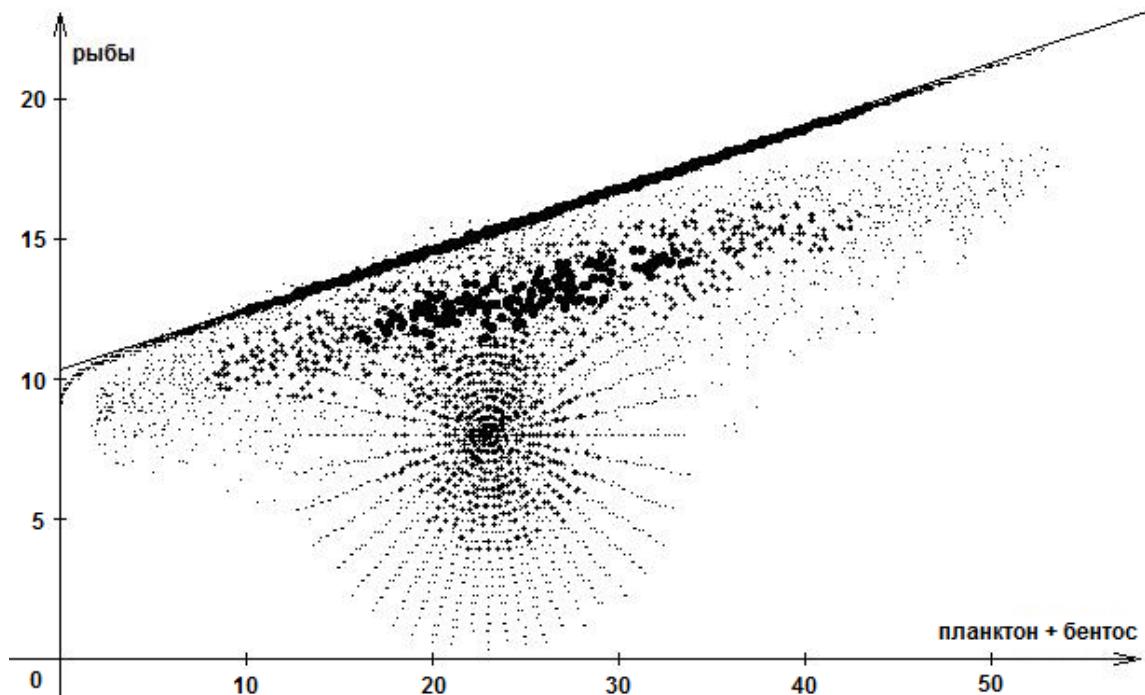


Рис. 6. Ненулевые значения функции принадлежности в модели М1. Начальный эллипсоид смещается к многообразию равновесий.

Для модели М1 имеем одномерное многообразие устойчивых равновесий, но нечеткость начального состояния делает эту устойчивость мало значащей, так как сравнительно небольшие отклонения начального состояния могут давать значительные расхождения финальных состояний на линии равновесия (рис. 6).

Для модели М2 неопределенность начального состояния существенно влияет на маршрут и время перехода в финальное устойчивое равновесие (рис. 7).

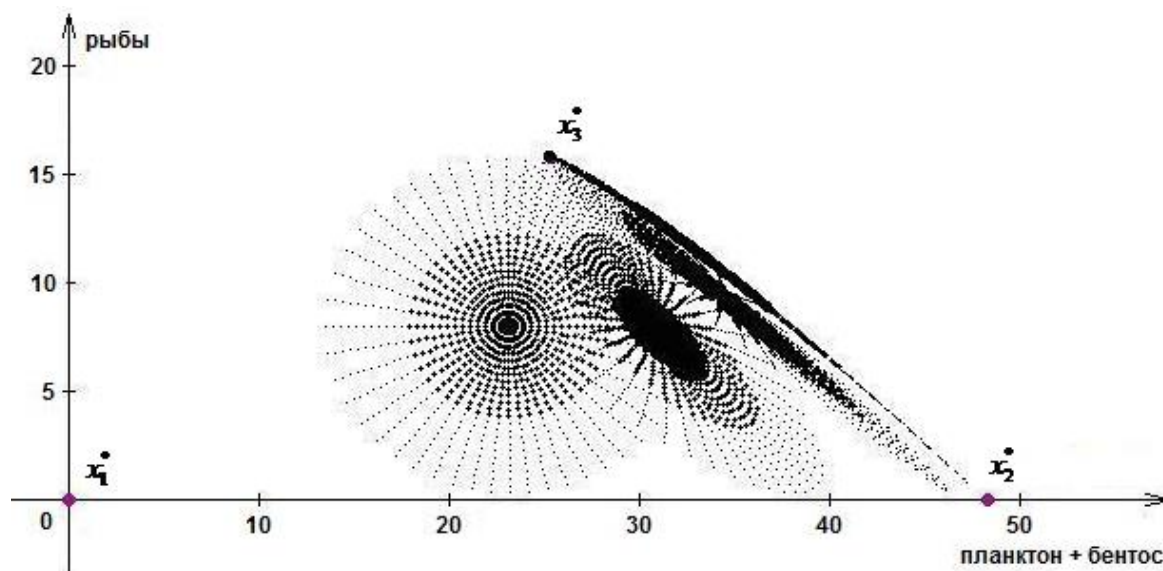


Рис. 7. Ненулевые значения функции принадлежности в модели М2. Начальный эллипсоид смещается вправо к сепаратрисе, а затем вдоль сепаратрисы – к устойчивому равновесию  $x_3^*$ .

Устойчивость положительного равновесия в модели М3 и его неустойчивость в модели М4 приводят к похожим результатам в поведении решений: начальные множества положительных значений функции принадлежности «размываются» и порождают разные возможности эволюции системы – от вырождения до более или менее устойчивого сосуществования всех частей экосистемы.

Все модели дают похожие и несколько различающиеся в деталях результаты. По ним можно определить множество возможных состояний системы в будущем со значениями принадлежности истинного состояния этому множеству.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате качественного анализа поведения моделей и проведенных численных экспериментов с ними было показано следующее.

Все четыре модели частично согласованы между собой в динамике – существует положительное равновесное решение, общее для второй, третьей и четвертой моделей и принадлежащее множеству равновесных решений первой модели. Это равновесие устойчиво в первых трех моделях и неустойчиво в последней модели. Однако, характер устойчивости таков, что поведение решений вблизи этого равновесия оказывается похожим во всех моделях. Учет неопределенности состояния системы делает это сходство еще большим. Общие свойства решений состоят в том, что решение весьма медленно «дрейфует» в окрестности указанного положительного равновесия. В первой модели множество возможных состояний системы «размазывается» вдоль многообразия положительных равновесий, во второй и третьей модели решение весьма медленно приближается к устойчивым равновесиям, а в четвертой модели решение большое время находится вблизи положительного равновесия, хотя оно неустойчиво.

Значительный временной интервал, необходимый для достижения равновесного состояния, показывает, что опытные данные среднесезонных значений биомасс компонентов экосистемы, рассмотренные в качестве равновесных значений, не могут достоверно характеризовать состояние изменяющейся экосистемы в фиксированный момент времени. В этих условиях некоторым специальным образом заданная функция принадлежности может указать на степень близости определенного состояния сообщества к действительному в заданный момент времени.

Исследование решений в модели M1 показало значительное влияние бактериально-детритного пути переноса энергии для экосистемы озера Большой Окуненок, обусловленное тем, что разнокачественный детрит занимает важное место в рационе большей части обитателей озера, в том числе рыб.

Все расчеты показывают, что нынешнее состояние озера Большой Окуненок может незначительно меняться, но заметные изменения могут произойти только за достаточно большое время (сто лет и более).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zadeh L.A. Biological applications of the theory of fuzzy sets and systems. In: *Biocybernetics of the central nervous system*. Ed. Proctor L.C., Littre L. C. Boston: Brown & Co., 1969. P.199–206.
2. Абакумов А.И. Неопределенность данных в математической экологии. *Дальневосточный математический журнал*. 2000. Т.1. № 1. С. 38–42.
3. Казанцева Т.И. Балансовая модель экосистемы мелкого высокоэвтрофного озера. *Журнал общей биологии*. 2003. Т. 64. № 2. С. 128–145.
4. Казанцева Т.И. Сравнительный анализ потоков энергии в экосистеме малого эвтрофного озера за три вегетационных сезона (балансовая модель). *Журнал общей биологии*. 2006. Т. 67. № 6. С. 423–441.
5. Абакумов А.И., Пахт Е.В. Моделирование при неопределенности данных (на примере водной экосистемы). *Информатика и системы управления*. 2009. № 2(20). С. 3–10.
6. Абакумов А.И., Гиричева Е.Е. Многомодельный подход к исследованию водных экосистем. *Известия Самарского научного центра РАН*. 2009. Т. 11. № 1(7). С. 1399–1402.
7. Chorin A.J., Marsden J.E. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Third Edition. N.Y.: Springer-Verlag New York, Inc., 1992. 182 с.
8. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. *Устойчивость биологических сообществ*. М.: Наука, 1978. 352 с.
9. Monod J. The growth of bacterial cultures. *Ann. Rev. Microbiol.* 1949. V. 111. № 2. P. 371–394.
10. Винберг Г.Г. *Интенсивность обмена и пищевые потребности рыб*. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1956. 253 с.
11. Сушня Л.М. *Интенсивность дыхания ракообразных*. Киев: Наук. думка, 1972. 196 с.
12. Абакумов А.И. Математическое моделирование популяций и сообществ в проблеме рационального природопользования. *Вестник ДВО РАН*. 1992. № 5–6. С. 82–91.
13. Кучер А.И., Абакумов А.И. Рыбопродуктивность и динамика биомассы ихтиоценоза оз. Ханка. *Вопросы ихтиологии*. 1997. Т. 37. № 5. С. 619–624.

Материал поступил в редакцию 16.05.2011, опубликован 31.05.2011.