

УДК:51.76

Сложная динамика планктона в топографическом вихре

©2015 Абакумов А.И.^{a,b,1}, Израильский Ю.Г.^{a,2}, Фрисман Е.Я.^{c,3},

^aИнститут автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, 690041, Владивосток, Россия

^bДальневосточный федеральный университет, 690091, Владивосток, Россия

^cИнститут комплексного анализа региональных проблем Дальневосточного отделения Российской академии наук, 679016, Биробиджан, Россия

Аннотация. Неоднородное распределение планктона в океане имеет как внешние, так и внутренние причины. Внешние причины — это влияние среды обитания, прежде всего, перемещения водных масс. Внутренние причины связаны с внутри- и межвидовыми взаимодействиями. Настоящее исследование показывает, что возможны резонансные эффекты между колебаниями факторов внешней среды и внутренними колебаниями в сообществе. В этом случае неоднородность распределения планктона по поверхности проявляется особенно ярко и динамично.

Ключевые слова: водная экосистема, фитопланктон, зоопланктон, питание, хищник, жертва, подводная гора, вихрь, жидкая частица, сечение Пуанкаре, хаос.

ВВЕДЕНИЕ

Фитопланктон является нижним уровнем в трофической структуре водной экосистемы и основой жизни в водоеме. Наблюдатели давно отметили явную неоднородность и выраженную динамичность распределения фито- и зоопланктона по поверхности океана [1]. Построены многочисленные модельные примеры, объясняющие это явление как межвидовыми взаимодействиями в сообществах, так и влиянием изменчивой среды обитания [1, 2, 3].

В нашем исследовании обе группы факторов учтены совместно. Возникающие неоднородности проявляются особенно ярко при возникновении резонансных явлений между колебательными процессами внутри сообщества и периодическими воздействиями окружающей среды. В водных экосистемах важное значение имеют состав и особенности перемещения водных масс. В нашем случае воздействие на сообщество моделируется в виде вихревого образования над подводной горой. Вихревые образования над подводными горами, получившие название топографических вихрей, являются предметом океанографических исследований с 80-х годов прошлого века [4]. Из исследований океанической циркуляции известно, что вихревые образования различной природы оказывают значительное влияние на горизонтальный перенос, перемешивание и распределения гидрологических и гидрохимических характеристик

¹abakumov@iacp.dvo.ru

²izrailsk@iacp.dvo.ru

³frisman@mail.ru

водных масс [4]. Таким образом, исследование процессов горизонтального переноса и перемешивания в вихревых структурах является важной проблемой геофизической гидродинамики. Кроме того, вихревыми потоками могут переноситься различные вещества и субстраты, необходимые для жизнедеятельности планктона. На основе концепции фоновых течений [5] удастся построить динамически согласованные модели вихревых потоков, в рамках которых по крайней мере на качественном уровне удастся исследовать перенос и перемешивание динамически пассивной примеси, а также влияние на эти процессы параметров возмущения.

В нашем исследовании в качестве гидродинамической модели рассматривается пульсирующий набегающий на подводную гору поток. Предполагается, что в водной среде происходит развитие фитопланктона, моделируется динамика биомассы фитопланктона в зависимости от питания и взаимная динамика фито- и зоопланктона. Рассматриваются только локальные взаимодействия компонент. В первой модели описание локальных взаимодействий сделано по аналогии с моделью хемостата. Во второй модели отношения фито- и зоопланктона описаны классической моделью «хищник-жертва». Компоненты систем перемещаются относительно горы вместе с водным потоком, соответственно меняются параметры моделей. В обоих случаях имеем сложное, местами хаотическое, поведение живых компонент этих систем.

2 ВИХРЕВЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ

В приближении несжимаемой невязкой жидкости поле течения характеризуется функцией тока $\Psi(x, y, t)$. Таким образом, лагранжева траектория жидкой частицы или адвектируемого пассивного скаляра $[x(t), y(t)]$, характеризуется системой уравнений адвекции

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Уравнения (1) представляют собой гамильтонову систему уравнений, где функция тока играет роль гамильтониана, а координаты — роль обобщенных переменных. Таким образом, транспорт динамически пассивной примеси в двухмерных потоках несжимаемой жидкости может исследоваться с использованием хорошо разработанных методов гамильтоновой динамики (см., например, [6, 7]). Как известно [8], стационарные гамильтоновы системы с одной степенью свободы являются интегрируемыми. Поэтому в случае, когда функция тока не зависит от времени, жидкие частицы движутся регулярным образом вдоль контуров постоянства Ψ . В случае же зависящей от времени функции гамильтона система, как правило, оказывается неинтегрируемой, и появляются предпосылки для возникновения хаотического движения, приводящего к хаотической адвекции [8, 7, 9, 10, 11]. Области интенсивного перемешивания и переноса примесей соответствуют хаотическим областям, в то время как регулярные траектории соответствуют непроницаемым для переноса барьерам.

В данной работе рассматривается функция тока вида

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(x, y) + \Psi_1(x, y, t), \quad (2)$$

где $\Psi_0(x, y)$ описывает невозмущенное движение жидкости, а $\Psi_1(x, y, t)$ — малое периодическое возмущение с частотой ω и амплитудой ϵ . Целью данной работы является изучение влияния параметров возмущения на хаотический перенос примесей. Несмотря на то, что анализу перемешивания и переноса примесей в топографических вихрях посвящено много публикаций (см., например, [12]), влияние на транспорт частоты внешнего возмущения остается недостаточно изученным.

Согласно концепции фоновых течений применительно к баротропным моделям геофизической гидродинамики, в случае неограниченной f -плоскости (параметр Кориолиса f принимается постоянным) функция тока несжимаемой жидкости над подводной горой высоты h удовлетворяет уравнению [5]

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -\frac{f}{H}h(x, y), \quad (3)$$

где H — средняя глубина бассейна. Для применимости этого приближения должны выполняться условия малости числа Россби $Ro = U/Lf \ll 1$ и малости высоты возвышенности h_0 по сравнению с глубиной бассейна $h_0/H \ll 1$, здесь U есть характерная скорость течения, а L — характерный горизонтальный масштаб.

Вводя безразмерные переменные $\hat{x} = x/L$, $\hat{y} = y/L$, $\hat{\Psi} = \Psi/LU$, $\hat{h} = h/h_0$ и опуская шляпки над безразмерными переменными перепишем уравнение (3) в виде

$$\Delta\Psi(x, y) = -\sigma h(x, y), \quad (4)$$

где $\sigma = (h_0/H)/Ro$. Уравнение (4) совместно с граничными условиями, задающими расходы жидкости на границах рассматриваемой области, однозначно определяет поле скоростей.

В случае локальной возвышенности осесимметричной формы $h = h(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и исчезающего на бесконечности поля скоростей уравнение (4) упрощается

$$\frac{1}{r}(r\Psi'(r))' = -\sigma h(r), \quad \Psi'(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Отсюда получаем

$$v_\varphi(r) = \Psi'(r) = -\frac{\sigma}{r} \int_0^r h(r)r dr, \quad (6)$$

где v_φ — азимутальная составляющая скорости жидкости (радиальная составляющая равна нулю). Формула (6) показывает, что частицы жидкости движутся по круговым траекториям по часовой стрелке с постоянной скоростью, т.е. над возвышенностью расположен антициклонический вихрь. Декартовы координаты скорости $u = v_x$ и $v = v_y$ выражаются через азимутальную скорость по формулам

$$u = -v_\varphi(r) \sin \varphi, \quad v = v_\varphi(r) \cos \varphi. \quad (7)$$

В дальнейшем мы рассматриваем возвышенность специальной формы $h(r) = \exp(-r^m)$, где m — положительное целое число (форм-фактор возвышенности). При больших значениях m возвышенность приобретает форму столовой горы или гайота. В этом случае входящий в (6) интеграл выражается через неполную гамма-функцию Эйлера и

$$v_\varphi(r) = -\frac{\sigma}{mr} \gamma(2/m, r^m). \quad (8)$$

Из (8) следует (см., например, [13]), что $|v_\varphi(r)|$ имеет на интервале $(0, \infty)$ единственный максимум, обращается в ноль на концах интервала и имеет асимптотику

$$v_\varphi(r) = -\frac{\sigma}{2} r \left(1 - \frac{2r^m}{m+2} \right) + O(r^{2m+1}), \text{ при } r \rightarrow 0, \quad (9a)$$

$$v_\varphi(r) = -\frac{\sigma}{m} \left[\frac{\gamma(2/m)}{r} - \frac{\exp(-r^m)}{r^{m-1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{r^{2m-1}}\right) \right) \right], \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (9b)$$

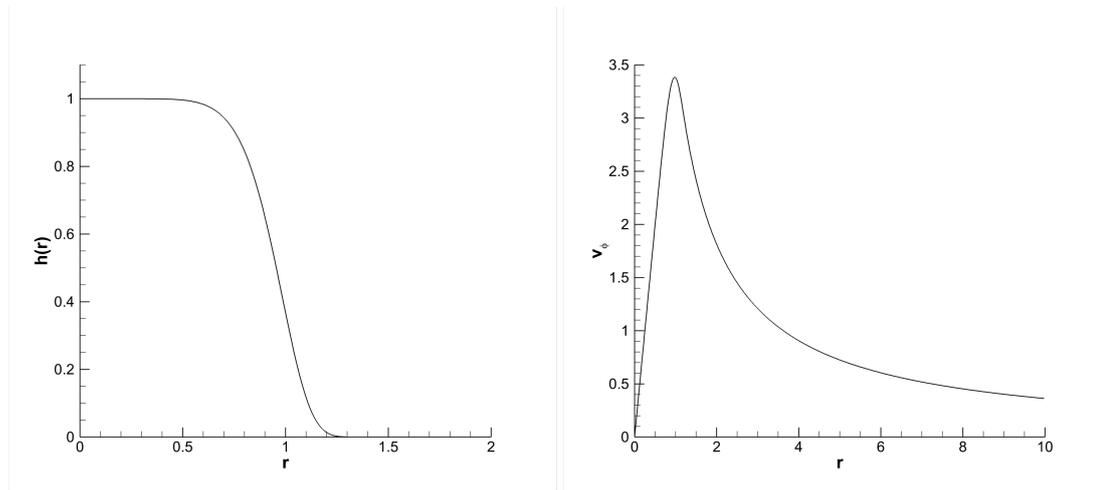


Рис. 1. Профиль горы (слева) и зависимость скорости жидкости от расстояния до центра вихря (справа).

В дальнейшем нами будут использоваться значения $m = 8$, $\sigma = 1$. Зависимость при указанных значениях параметров $v_\phi(r)$ показана на рис. 1. Максимальное значение скорости $v_{max} \approx 3.38$ достигается при $r \approx 0.978$.

Теперь рассмотрим случай, когда на топографический вихрь набегают однородный поток жидкости со скоростью W , направленной вдоль оси x . Если $W < v_{max}$, то в результирующем течении появляются две стационарные точки, соответствующие двум решениям уравнения $v_\phi(r) = W$. Одна из них будет эллиптической, а другая — гиперболической особой точкой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение жидких частиц

$$\dot{x} = u(x, y) + W, \quad \dot{y} = v(x, y) \tag{10}$$

Таким образом, область течения разбивается на две области — вихревую с замкнутыми линиями тока и проточную с линиями тока, уходящими на бесконечность. Эти две области разделяет сепаратриса, самопересекающаяся в особой точке, с ветвями, уходящими на бесконечность. Результирующая картина линий тока показана на рис. 2. На рисунках 2–8 показана динамика показателей внутри области, ограниченной сепаратрисой до точки ее самопересечения.

Внутри вихревой области жидкие частицы вращаются вокруг центра вихря с угловой частотой $\Omega = 2\pi/T$, где T — время оборота частицы относительно центра вихря. Зависимость Ω от траектории частицы иллюстрирует рис. 2. Из (9а) видно, что вблизи центра вихря вращение жидкости близко к твердотельному с угловой скоростью $\sigma/2$, о чем также свидетельствует пологая вершина графика на рис. 2.

В дальнейшем мы будем рассматривать пульсирующий набегающий поток вида

$$W(t) = W_0[1 + \epsilon \cos(\omega t)] \tag{11}$$

с амплитудой пульсаций ϵ и частотой ω . Такой пульсирующий поток может быть вызван, например, приливами. Течение при $\epsilon = 0$ мы будем называть невозмущенным течением. В расширенном фазовом пространстве фазовые траектории невозмущенной системы представляют собой обмотку торов (моменты времени t и $t + 2\pi/\omega$ отождествляются). Это инвариантные КАМ-торы [6], они пересекают плоскость $t = 0$ по замкнутым кривым, совпадающим с линиями тока. Эти торы служат непроницаемыми барьерами

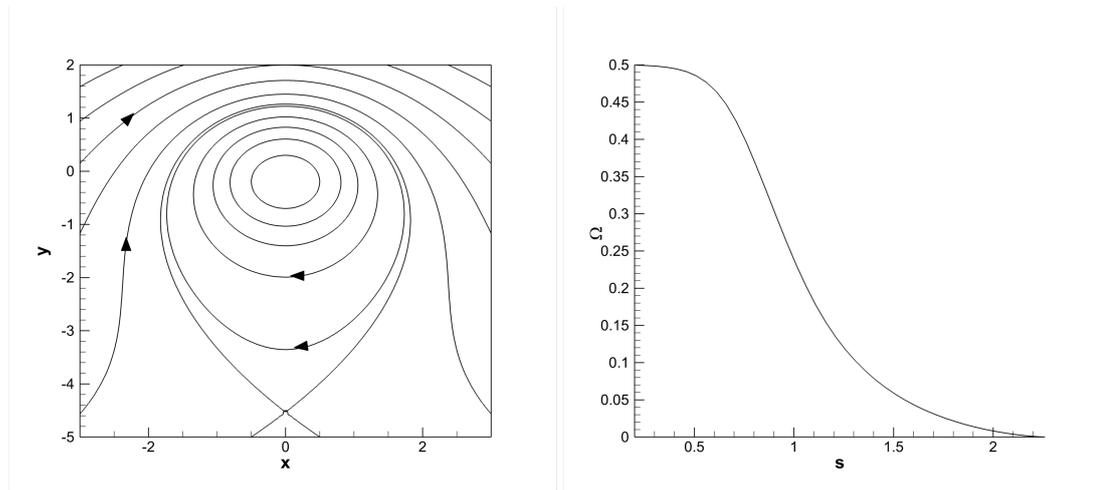


Рис. 2. Слева: картина линий тока при $W = 1$. Стрелками показано направление движения жидких частиц. Справа: зависимость частоты оборота жидкой частицы Ω относительно центра вихря от расстояния s от начала координат до точки пересечения линии тока с лучом, выпущенным из начала координат в направлении $(0, -1)$.

для находящихся внутри них частиц. При $\varepsilon \neq 0$ часть КАМ-торов разрушается и возникает возможность хаотического перемешивания [9, 8]. Наиболее «опасными» являются значения ω находящиеся в резонансном отношении с частотой оборота Ω . Наглядное представление о влиянии периодического возмущения можно получить, рассматривая отображение Пуанкаре — отображение, переводящее точку (x, y) в ее положение через период возмущения $2\pi/\omega$ при помощи уравнений движения (10).

С возрастанием частоты пульсаций набегающего потока зона устойчивых движений вокруг горы увеличивается (рис. 3), но ближе к сепаратрисе сохраняется хаотическое движение водной массы.

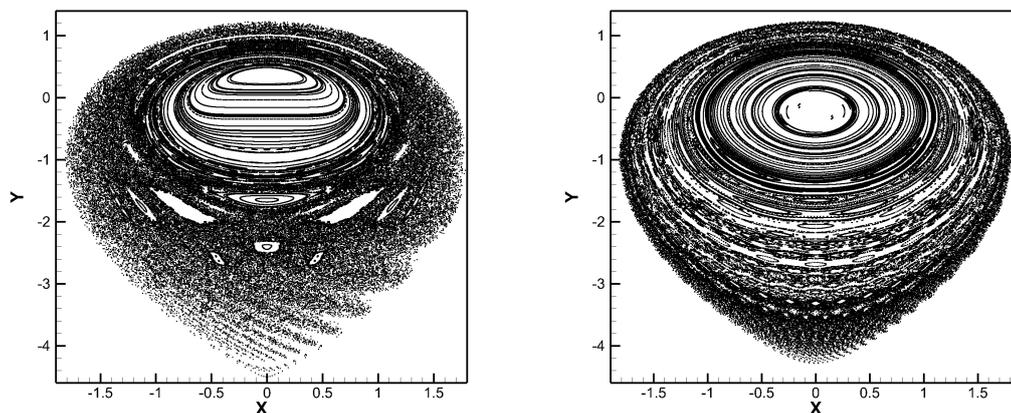


Рис. 3. Сечения Пуанкаре при $\omega = 0.25$ (слева) и $\omega = 1.0$ (справа).

3 ДИНАМИКА ФИТОПЛАНКТОНА В ТОПОГРАФИЧЕСКОМ ВИХРЕ

Введем теперь в рассмотренную модель топографического вихря существование фитопланктонного сообщества, особи которого пассивно переносятся вихревыми

течениями. Локальную динамику концентрации P фитопланктона будем считать зависимой от минеральных питательных веществ концентрации N в той же точке пространства. Модель локальных взаимодействий естественно выбрать в виде одного из вариантов «хемостатной модели» [14]:

$$\dot{N} = D(r)(N_b - N) - \mu(N)P, \tag{12a}$$

$$\dot{P} = \mu(N)P - e(P)P. \tag{12b}$$

Через $D(r)$ обозначена скорость (вертикального) протока питательных веществ концентрации N_b . Функция $\mu(N)$ характеризует удельную скорость роста фитопланктона, а функция $e(P)$ — удельную скорость его элиминации. Элиминация происходит из-за смертности, выедания зоопланктоном и выноса тем же вертикальным протоком. Поэтому скорость элиминации не совпадает со скоростью вертикального протока, как это следовало бы постулировать в соответствии с хемостатной моделью.

Скорость вертикального протока над горой наибольшая, с расстоянием от горы скорость уменьшается по экспоненте:

$$D(r) = D_0(\exp(-r) + D_1). \tag{13}$$

Удельные скорости роста и элиминации для фитопланктона имеют одну из вариаций традиционной формы:

$$e(P) = e_0 + e_1P, \quad \mu(N) = \mu_0 N / (N + N_0). \tag{14}$$

Все константные параметры модели положительны.

При постоянном D эта модель имеет единственное положительное устойчивое стационарное решение. В зависимости от численных значений параметров равновесие может меняться от устойчивого узла к устойчивому фокусу и обратно.

Перемещение питательных веществ и фитопланктона происходит в соответствии с уравнениями движения (10). На рис. 4–6 в соответствии с сечениями Пуанкаре на рис. 3 показаны варианты пространственной динамики фитопланктона при различных частотах пульсаций набегающего потока.

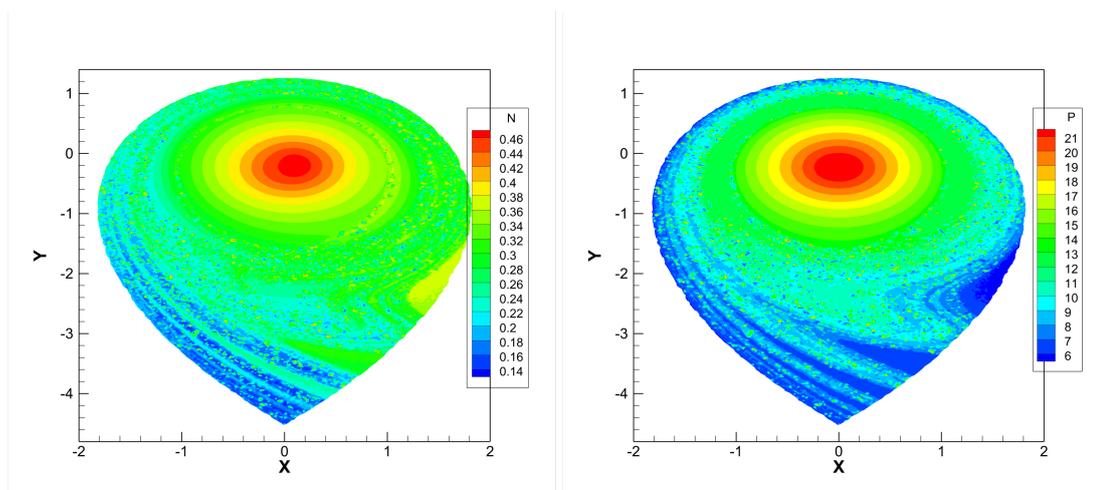


Рис. 4. Распределение питательных веществ (слева) и фитопланктона (справа) в момент времени $t_k = 2\pi k / \omega$, при $k = 32$, $\omega = 0.25$.

Рис. 4–6 демонстрируют хаотическое поведение концентраций питательных веществ и фитопланктона вблизи сепаратрисы. Над горой устанавливается более регулярная квазипериодическая динамика, хотя рис. 5 для фитопланктона указывает на частичный хаос и над вершиной подводной горы. Вероятно, в этом случае тип устойчивости равновесной точки вблизи вершины подводной горы постоянно меняется, что создает изменчивость квазипериодического решения.

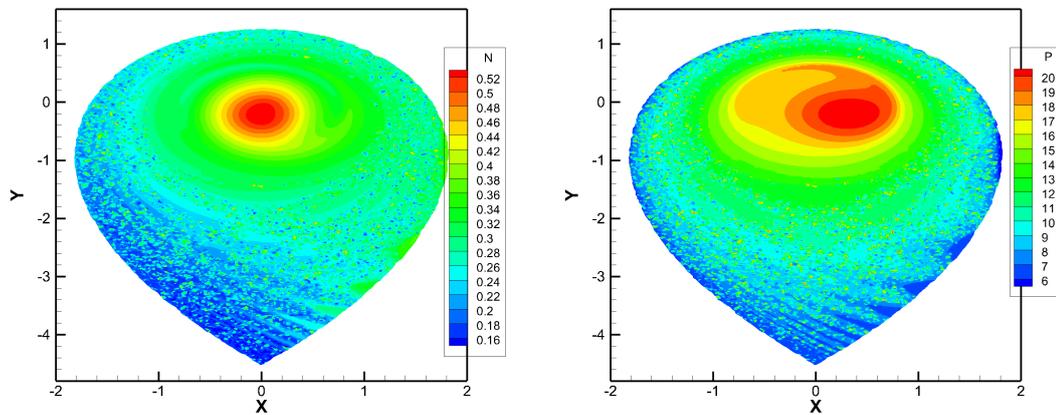


Рис. 5. Распределение питательных веществ (слева) и фитопланктона (справа) в момент времени $t_k = 2\pi k/\omega$, при $k = 64$, $\omega = 0.5$.

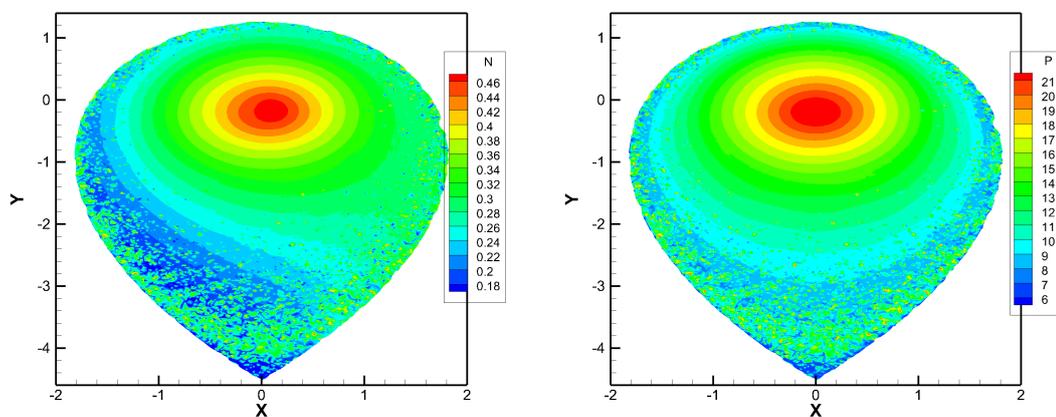


Рис. 6. Распределение питательных веществ (слева) и фитопланктона (справа) в момент времени $t_k = 2\pi k/\omega$, при $k = 128$, $\omega = 1.0$.

Далее мы рассмотрим ситуацию, когда структура планктонного сообщества соответствует модели «хищник-жертва», в которой при постоянных параметрах имеется единственное стационарное решение типа центра и бесконечный набор периодических нейтрально устойчивых решений. Что происходит с динамикой сообщества в условиях набегающего пульсирующего потока?

4 ПЛАНКТОН В ТОПОГРАФИЧЕСКОМ ВИХРЕ

Теперь поставим во главу угла взаимоотношения между фито- и зоопланктоном в планктонном сообществе. Зоопланктон, в отличие от фитопланктона, обладает самостоятельным направленным движением. Но, как и для фитопланктона, мы этим движением пренебрежем, полагая его существенно меньшим по сравнению с набегающим пульсирующим потоком воды. В планктоне водоема зоопланктон является основным хищником для фитопланктона. Модель взаимодействия фито- и зоопланктона принята в виде классической модели сообщества «хищник-жертва»:

$$\dot{P} = \eta(r)P - v(P)Z, \quad (15a)$$

$$\dot{Z} = v(P)Z - m(r)Z. \quad (15b)$$

Удельная скорость выедания описывается линейной функцией

$$v(P) = v_0P.$$

Функция $\eta(r)$ рождаемости для фитопланктона и функция $m(r)$ смертности для зоопланктона зависят от положения точки относительно горы:

$$\eta(r) = \eta_0(1 + \eta_1 \exp(-(r - 1)^2)), \quad m(r) = m_0(1 + m_1r/(r + 1)). \quad (16)$$

Все константные параметры модели также положительны.

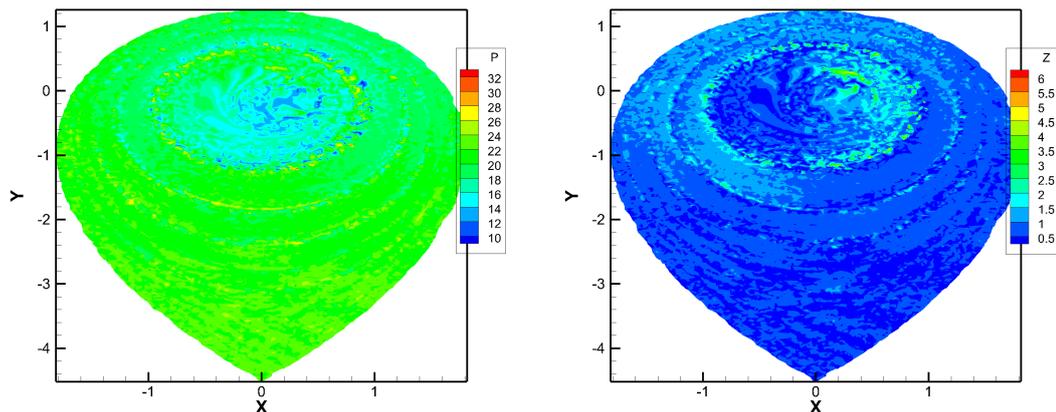


Рис. 7. Распределение фитопланктона (слева) и зоопланктона (справа) в момент времени $t_k = 2\pi k/\omega$, при $k = 64$ при $\omega = 0.5$.

Рисунки 7 и 8 демонстрируют нерегулярное распределение фитопланктона и зоопланктона не только вблизи сепаратрисы системы (10), т.е. в области сильного перемешивания жидкости, но и в окрестности центра вихря (сравните рис. 3 и рис. 8). Это обстоятельство заставляет предположить, что в результате резонансов между частотой изменения коэффициентов системы (15), связанной с вращением жидких частиц вокруг центра вихря, и характерной частотой внутренних колебаний системы (15) при замороженных коэффициентах η и m происходит хаотизация фазовых траекторий этой системы.

Для проверки этого предположения рассмотрим упрощенный вариант задачи. Рассмотрим (15), но с коэффициентами

$$\eta = \eta_0(1 + \delta \cos(\omega t)), \quad m = m_0(1 + \delta \cos(\omega t)), \quad (17)$$

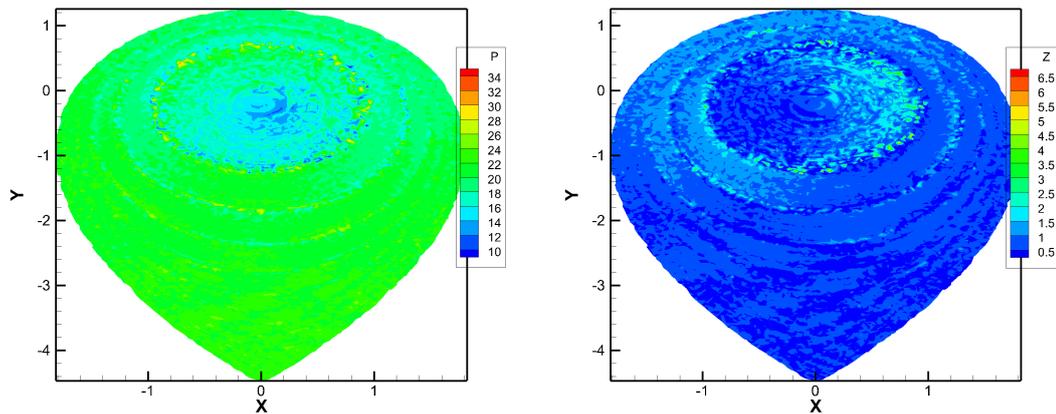


Рис. 8. Распределение фитопланктона (слева) и зоопланктона (справа) в момент времени $t_k = 2\pi k/\omega$, при $k = 128$, $\omega = 1.0$.

и тем самым разорвем связь между (15) и (10). Кроме того перейдем от переменных P, Z к переменным $p = \ln P$ и $z = \ln Z$, получим

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial z} = \eta - v_0 \exp z, \tag{18a}$$

$$\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial p} = v_0 \exp p - m, \tag{18b}$$

$$H = Ez + mp - v_0(\exp z + \exp p). \tag{18c}$$

При $\delta = 0$ система (15) имеет стационарную точку типа центра при $z = \ln(\eta_0/v_0)$ и $p = \ln(m_0/v_0)$, вблизи которой решения совершают колебания с частотой $\Omega = \sqrt{\eta_0 m_0}$. Фазовый портрет системы и зависимость частоты колебаний от фазовой траектории приведены на рис. 9.

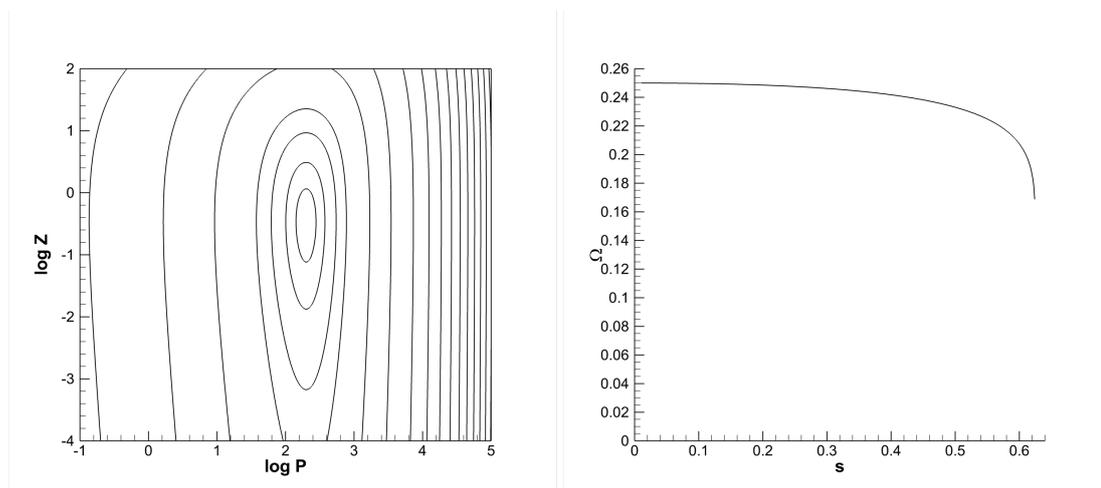


Рис. 9. Фазовый портрет системы (15)–(17) (слева) и зависимость частоты оборота фазовой траектории Ω относительно особой точки от расстояния s от этой точки до точки пересечения этой траектории с лучом, выпущенным из особой точки в направлении $(0, -1)$.

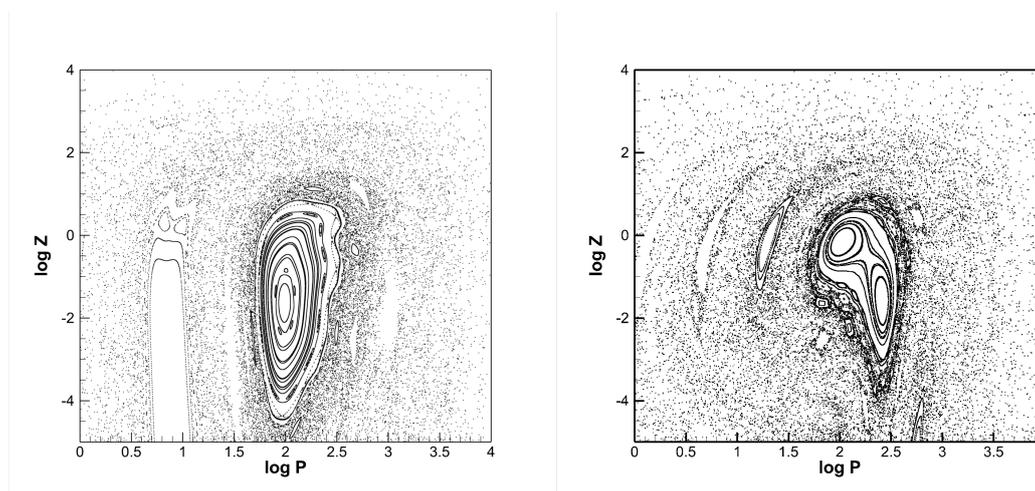


Рис. 10. Сечения Пуанкаре для (15)–(17) при $\delta = 0.1$ и $\omega = 0.25$ (слева), $\omega = 0.50$ (справа).

Частота Ω «собственных» колебаний системы (15)–(17) при $\delta = 0$ вблизи стационарной точки уменьшается незначительно, изменение становится заметным при $s \geq 0.5$ (рис. 9,б). Однако, и этих изменений достаточно для создания сложного динамического режима вблизи стационарной точки. На рис. 10 показаны сечения Пуанкаре для (15)–(17) при $\delta = 0.1$ и различных значениях ω .

В этом случае стационарное решение превращается в циклы. Частота циклов уменьшается по мере удаления от «бывшей» стационарной точки. При $\omega = 0.25$ сохраняется подобие «собственных» колебаний системы (15) (когда $\delta = 0$) вблизи «бывшей» стационарной точки. По мере удаления от этой точки возникают хаотические режимы, связанные с резонансом между «собственными» колебаниями системы (15) и «внешними» колебаниями согласно (17). При возрастании ω до 0.50 (примерно вдвое больше по отношению к собственным колебаниям вблизи «бывшей» стационарной точки) резонансные явления возникают вблизи этой точки, циклы частично раздваиваются, область хаоса приближается к «бывшей» стационарной точке. Проявляются сложные хаотические явления, возникают предельные циклы вне зоны «бывшего» стационара.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сопоставление рисунков 3 и 4–6 показывает, что при постоянном поступлении и вертикальном протоке питательных веществ установившееся распределение фитопланктона фактически проецирует структуру вихревых потоков. Основная часть биомассы сосредотачивается над вершиной горы, отслеживая распределение питательных веществ, и здесь устанавливается достаточно регулярная квазипериодическая динамика, хорошо выраженная при малых и больших частотах колебаний набегающего потока и несколько «деформированная» при средних. Концентрации биомассы фитопланктона, как и питательных веществ, закономерно падают по трансекте от центра вихря к сепаратрисе, и при этом происходит постепенная хаотизация динамики, резко возрастающая вблизи сепаратрисы. Наблюдаемую картину вполне можно объяснить пассивным переносом питательных веществ, распределение которых отражает структуру вихря, и приводит к соответствующему перераспределению и перемешиванию биомассы фитопланктона.

Введение взаимодействия «фитопланктон-зоопланктон» и отказ от постоянного пополнения биогенных веществ приводит к принципиальному изменению динамических режимов и перераспределению биомасс. В центре вихря происходит хаотическое увеличение концентрации зоопланктона, который «выедает» здесь значительную часть фитопланктона. По трансекте к периферии вихря концентрация зоопланктона падает (хотя и весьма немонотонно и нерегулярно), а концентрация фитопланктона возрастает. По-видимому, увеличение степени хаотизации вихревых течений вблизи сепаратрисы создает условия, при которых фитопланктон сохраняется в толще и менее подвержен выеданию.

Таким образом, попадание планктона в топографический вихрь приводит к существенному перераспределению органического вещества в водной экологической системе и возникновению сложных динамических режимов, определяемых резонансными взаимосвязями внутренних колебательных процессов в экосистеме и внешних колебательных воздействий на вихревые потоки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А. Об изучении балансовых соотношений в биоценозе. *Журнал общей биологии*. 1968. Т. 29. № 6. С. 351–359.
2. Йоргенсен С. *Управление озерными экосистемами*. М.: Агропромиздат, 1985.
3. Домбровский Ю., Маркман Г. *Пространственная и временная упорядоченность в экологических и биохимических системах*. Изд-во Ростовского университета, 1983.
4. Козлов В.Ф., Кошель К. В. Хаотическая адвекция в моделях фоновых течений геофизической гидродинамики. В: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*. Под ред. Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколовский М.А. Москва, Ижевск, 2003.
5. Козлов В.Ф. Фоновые течения в геофизической гидродинамике. *Известия АН. Физика атмосферы и океана*. 1995. Т. 31. № 2. С. 245–250.
6. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса*. М.: Наука, 1988.
7. Wiggins S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.
8. Ottino J. *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
9. Aref H. Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1983. V. 15. No. 1. P. 345–389.
10. Aref H. Stirring by chaotic advection. *Journal of Fluid Mechanics*. 1984. V. 143. P. 1–21.
11. Aref H. Chaotic advection of fluid particles. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. 1990. V. 333. No. 1631. P. 73–288.
12. Izrail'sky Y.G., Koshel K.V., Stepanov D.V. Determination of the optimal excitation frequency range in background flows. *Chaos*. 2008. V. 18. No. 1. P. 13107.
13. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1979.
14. Абросов Н., Боголюбов А. *Экологические и генетические закономерности сосуществования и коэволюции видов*. Новосибирск: Наука, 1988.

Материал поступил в редакцию 17.08.2015, опубликован 22.10.2015.