# ====== МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ =======

УДК:530.182.2:573.7

# О связи свойств одномерных отображений управляющих функций с хаосом в уравнении специального вида с запаздывающим аргументом

Лихошвай В.А.\*1,3, Когай В.В.<sup>2,3</sup>, Фадеев С.И.<sup>2,3</sup>, Хлебодарова Т.М.\*\*1

<sup>1</sup>ФИЦ Институт цитологии и генетики, Сибирское отделение Российской академии наук, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л.Соболева, Сибирское отделение Российской академии наук, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия

**Аннотация.** Рассмотрено дифференциальное уравнение специального вида, содержащее две управляющие функции f и g и один запаздывающий аргумент, которое широко используется в биологии для описания динамических процессов, в том числе, популяционных, физиологических, метаболических, молекулярно-генетических и т.д. На конкретных численных примерах показана связь между свойствами одномерного отображения, порождаемого отношением f/g и наличием у данного уравнения хаотической динамики. Сформулирован эмпирический критерий, который позволяет, по свойствам одномерного отображения f/g прогнозировать наличие хаотического потенциала у данного уравнения.

**Ключевые слова:** моделирование, детерминированный хаос, уравнения с запаздывающим аргументом, регуляция по механизму обратной связи, эмпирический критерий.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Уравнения с запаздывающим аргументом вида:

$$\frac{dp(t)}{dt} = f(p(t-\tau)) - p(t)g(p(t-\tau)), \tag{1}$$

где  $\tau$  — параметр запаздывания, широко используются для моделирования нелинейных динамических процессов, характерной особенностью которых является наличие запаздывания сигнала от момента его генерации до момента воздействия на систему. Управляющие функции f и g в таких моделях могут описываться унимодальными монотонно возрастающими и монотонно убывающими функциями и их сочетанием. Такие системы часто демонстрируют сложную динамику, в том числе и хаотическую [1–11]. Оказалось, что запаздывание является одним из факторов генерации хаоса [11].

В молекулярно-генетических системах запаздывание регуляторного сигнала является следствием матричного принципа передачи наследственной информации, т.е., лежит в основе всех клеточных процессов. Анализ таких систем представляет особый

.

<sup>\*</sup>likho@bionet.nsc.ru

<sup>\*\*</sup> tamara@bionet.nsc.ru

интерес, поскольку факторы генерации хаоса заложены в саму основу жизненного цикла клетки. Однако, в отличие от других уровней организации живой природы, для которых существуют убедительные примеры явления хаоса (так функционируют природные экосистемы [12], такой может быть стратегия поиска пищи у моллюска [13], так формируется пигментация у некоторых видов моллюсков [14–16], возникают спорадические эпидемии [17] и происходят вспышки численности в популяциях хищников, грызунов, и насекомых [18–21], так проявляются различные заболевания [22–27] и др.), на внутриклеточном уровне, *in vivo*, экспериментально доказанных примеров хаоса нет, хотя теоретически он предсказан в различных молекулярногенетических и метаболических системах [1, 10, 11, 28–34]. Почему? Этот и многие другие вопросы возникают в связи с пониманием роли хаоса в функционировании живых систем.

Как следует из вышеприведенных примеров, эта роль неоднозначна, и в каждом конкретном случае требует отдельного исследования. Не только запаздывание, но и структура регуляторных связей, описываемых управляющими функциями f и g, накладывает свой отпечаток на параметрические особенности динамического режима системы. Так, если клеточные процессы контролируются по механизму негативной обратной связи, то они создают условия для формирования периодической динамики [31, 33, 34], сочетание позитивно-негативной связи и двойных негативных способствует проявлению хаотической динамики [1, 2, 6, 9, 34].

В настоящей работе мы исследовали хаотический потенциал уравнения (1) для ряда управляющих функций, описывающих структурно-функциональные особенности механизмов регуляции процессов, контролируемых по механизму обратной связи. Проведённые численные эксперименты, направленные на поиск хаотической динамики, указали на глубокую связь между хаотическим потенциалом уравнения (1) и одномерным отображением отношения управляющих функций f и g. На этой основе нами сформулирован эмпирический критерий достаточности существования хаоса в уравнении с запаздывающим аргументом (1).

## Метод расчета

уравнения (1) решалась методом последовательного интегрирования (метод шагов) [35] с помощью оригинальной программы, написанной Фортран. проводились Расчёты на вычислительном комплексе Информационно-вычислительного Новосибирского центра государственного университета (http://www.nusc.ru).

#### Оценка хаотичности

Хаотичность динамики уравнения (1) определяли с использованием двух критериев: чувствительность от начальных данных и специальный вид отображения Пуанкаре.

**Чувствительность от начальных данных.** Чувствительность колебательной динамики выявлялась путем вычисления разности между двумя траекториями одной переменной, насчитываемыми двумя идентичным моделям, стартующими в нулевой момент времени с начальными функциями, отличающимися друг от друга на «малое» значение. Если после некоторого интервала расчета разница становилась сравнимой с амплитудой колебания, то делался вывод о чувствительности динамики от начальных данных.

**Отверажение Пуанкаре.** Характерный вид отображения Пуанкаре (так называемое отображение последования) позволяет получить информацию о типе траектории. Так, циклическая траектория будет порождать отображение Пуанкаре, состоящее из конечного числа точек, через которые траектория будет проходить в некоторой

последовательности. Квазициклическая траектория будет отображаться на плоскости в виде некоторой совокупности замкнутых кривых. Отображение Пуанкаре, отвечающее странному аттрактору, представляет неупорядоченное бесконечное множество точек. Способ построения отображения Пуанкаре описан ранее [2, 3].

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Взаимосвязь между одномерным отображением, порождаемым отношением управляющих функций f/g и хаотической динамикой в уравнениях вида (1)

В общем случае уравнение (1) может демонстрировать все типы аттракторов: стационарные, циклические, квазициклические и хаотические. Сложность фазового портрета (1) существенно зависит от вида функций f и g. Однако до сих пор нет общей теории, которая позволяла бы по виду правой части описывать фазовый портрет динамической системы в целом. В полной мере это относится и к уравнению (1). Более того, для данного уравнения мы не умеем даже прогнозировать само существование колебательного аттрактора.

В данном разделе мы предлагаем определённую последовательность проведения численного эксперимента, направленного на поиск хаотического аттрактора у уравнения (1).

На первом этапе вычисления связаны с поиском значений параметров функций f и g, при которых одномерное отображение f/g характеризуются хаотичностью. В этом случае целью вычислений на втором этапе является поиск параметра  $\tau$  и начальных условий, при которых уравнение (1) имеет хаотический аттрактор. Проведенные численные эксперименты указывают на их существование.

В качестве примеров рассмотрим четыре комбинации управляющих функций в уравнении (1).

$$f(x) = \frac{\alpha \left(\frac{x}{K_{a,I}}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{K_I}\right) + \left(\frac{x}{K_I}\right)^2}, \ g(x) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{\left(\frac{x}{K_D}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{K_D}\right) + \left(\frac{x}{K_D}\right)^2}\right)^{h_D}, \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{K_I}\right)^h}, \ g(x) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{K_D}\right)}\right), \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{\alpha \left(\frac{x}{K_I}\right)}{1 + \left(\frac{x}{K_I}\right)}, \ g(x) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\left(\frac{x}{K_D}\right)^h}{1 + \left(\frac{x}{K_D}\right)^h}, \tag{4}$$

$$f(x) = \alpha x, \ g(x) = \frac{1}{1-x}.$$
 (5)

Функции f(x) описывают различные типы управления скоростью прироста значения целевой переменной x, а функции g(x) — различные способы управления процессом снижения ее значения. Негативные типы управления представлены в (3), а варианты реализации позитивных способов управления представлены в (2), (4) и (5).

В приложении к конкретным природным системам, например, молекулярногенетическим или биохимическим, целевая переменная x обычно имеет смысл концентрации некоторого целевого продукта. Это может быть РНК, белок, фермент или иная субстанция. Именно такая интерпретация обычно возникает при подстановке функций (2), (3), (4) из работы [1] при описании регуляции в реальных молекулярногенетических, природных и искусственных, системах. В этом случае, параметры имеют смысл скоростей протекания реакций синтеза или распада (деградации) вещества, комплекса и др. (константы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K_I$ , и  $K_D$ ). Параметр  $h_D$  является коэффициентом Хилла. Его значение отражает структурно-функциональную сложность системы и степень нелинейности молекулярных регуляторных процессов [36].

Основой для определения функций (5) послужила логистическая функция  $H(x) = \alpha x (1-x)$ . Она широко используется в моделях популяционной динамики, и примечательна тем, что для нее очень хорошо изучены свойства (в том числе и хаотические) одномерных отображений  $x \to F(x)$  единичного интервала в себя [37, 38]. В работе [11] данное отображение использовалось для демонстрации хаотической динамики в уравнении (1), которое бралось при f(x) = H(x), g(x) = 1:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t - \tau)(1 - x(t - \tau)) - x(t). \tag{6}$$

Заметим, что формально логистическую функцию можно представить в виде отношения функций f и g из (5).

Уравнение (6) отличается от уравнения (5) и не имеет биологического приложения, оба они были включены в анализируемый перечень, и для обоих наблюдалась хаотическая динамика при условии наличия хаотической динамики у логистического одномерного отображения. Это подтверждает существование взаимосвязи динамических свойств уравнения (1) с динамическими свойствами соответствующих одномерных отображений, которая проявляется как внутреннее свойство данных математических объектов.

Для установления параметров, при которых одномерные отображения

$$x_{n+1} = F(x_n), F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
 (7)

порождаемые отношениями управляющих функций (2)–(5), характеризуются хаотичностью, мы использовали теорему Li-Yorke [39], согласно которой наличие цикла длины три означает хаос.

По определению, циклом длины *п* называется числовая последовательность

$$x_2 = F(x_1), x_3 = F(x_2), ..., x_n = F(x_{n-1}), x_1 = F(x_n), \forall i \neq j, i, j = 1, ..., n \Rightarrow x_i \neq x_j.$$

Если n = 3, то длина цикла равняется трем. Циклы длины 3 для одномерного отображения (6) определяли из уравнения:

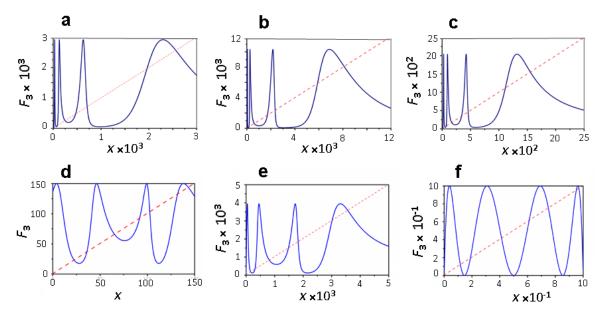
$$x = F_3(x), \quad F_3(x) = F(F(F(x))).$$
 (8)

Значения параметров, при которых у одномерных отображений F, порождаемых отношениями функций (2)–(5), имеются циклы периода три, представлены в таблице 1. Графики функций  $F_3(x)$ , демонстрирующие наличие цикла длины три для значений наборов параметров 1–7, указанных в столбце «Значения параметров» таблицы 1, представлены на рисунке 1.

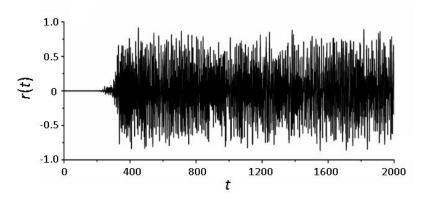
**Таблица 1.** Наборы значений параметров модели (1),(2)–(5), при которых у одномерного отображения (7) имеются циклы периода 3

<b>№</b> п/п	<b>№</b> функции	Значения параметров						$ au$ , при котором в $(1)^a$
		α	$\beta_1$	$\beta_2$	$K_I$	$K_D$	$h_D$	реализуется хаос
1	(2)	20	0.001	1	500	1000	3	434.54,550,1100
2	(2)	20	0.001	1	500	4000	3	646.50, 667.50,1000,3500
3	(2)	20	0.001	1	500	300	6	392.20, 417.00
4	(3)	20	0	1	100	10	7	33.68
5	(4)	100	0.002	1	$10^{4}$	5000	5	490, 900
6	(5)	3.9	_	1	_	_	_	1.26
7	(5)	4.0	-	1	-	-	-	1.12, 5

<sup>&</sup>lt;sup>а</sup>Начальная функция  $x(t) = 1000.5, t \in [-\tau, 0].$ 



**Рис. 1.** Поведение функции  $F_3$  (8), демонстрирующее наличие цикла периода 3 для функций f и g и наборов значений параметров, представленных в соответствующих строках табл.1 (строка  $1-(\mathbf{a})$ , строка  $2-(\mathbf{b})$ ,  $3-(\mathbf{c})$ ,  $4-(\mathbf{d})$ ,  $5-(\mathbf{e})$ ,  $6-(\mathbf{f})$ . Циклы (x, F(x), F(F(x))) для  $(\mathbf{a})$  равны (1961.1, 83.54842, 467.17334), для  $(\mathbf{b})-(5885.28, 178.11842, 1711.28405)$ ,  $(\mathbf{c})-(1112.66, 70.43802, 341.95849)$ ,  $(\mathbf{d})-(143.48, 22.70728, 65.41252)$ ,  $(\mathbf{e})-(3014.99, 305.46921, 1481.44282)$ ,  $(\mathbf{f})-(0.951, 0.18174, 0.57996)$ , соответственно.



**Рис. 2.** Неустойчивость от начальных данных для уравнения (1),(5) при  $\alpha = 4$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\tau = 5$ . Ось абсцисс – время. Ось ординат – разность между решениями двух задач, рассчитанных с разницей  $10^{-9}$  в начальных условиях, на интервале [–5,0].

Расчеты модели (1) показали, что для каждой пары управляющих функций (2)–(5) при значениях запаздывающего параметра, указанного в правом крайнем столбце таблицы 1, наблюдается неустойчивость от начальных данных. Пример подобной неустойчивости, рассчитанной для уравнения (1) с управляющими функциями (5) при  $\alpha$  =4,  $\beta_1$  = 1,  $\tau$  = 5, приведен на рисунке 2.

Чтобы убедиться в том, что неустойчивость от начальных данных свидетельствует о наличии хаотической динамики в исследованных уравнениях, мы провели расширенный анализ динамических свойств уравнения (1) для конкретного вида управляющих функции (2) и конкретных наборов параметров, представленных в таблице 1, при которых одномерное отображение (7),(2) имеет хаотическую динамику (см. табл. 1).

# Хаос в уравнении с запаздывающими аргументами вида (1) с функциями (2)

*Набор параметров* **1** (табл. 1, строка № 1):

$$\alpha = 20$$
,  $\beta_1 = 0.001$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $K_I = 500$ ,  $K_D = 1000$ ,  $h_D = 3$ .

Для данного набора параметров одномерное отображение (7),(2) имеет цикл длины три (рис. 1,а). Неустойчивость от начальных данных наблюдается для  $\tau = 550$ , 1100 (см. табл. 1). На рисунке 3,d эта неустойчивость продемонстрирована для двух решений модели с разницей  $10^{-9}$  в начальных условиях.

Для более глубокого исследования динамических свойств уравнения (1),(2) выберем плоскость Пуанкаре, p(t) = 1000, и построим бифуркационную диаграмму для решений уравнения (1),(2) при разных значениях  $\tau$ . Из рисунка 3 видно, что с ростом  $\tau$  переход от периодических решений при  $\tau = 400$  (рис. 3,a) к хаосу происходит при  $\tau \sim 435$  через бифуркации удвоения периода (рис. 3,b), т.е., по сценарию Фейгенбаума [37, 38] и области хаотической динамики перемежаются с периодической (рис. 3,c).

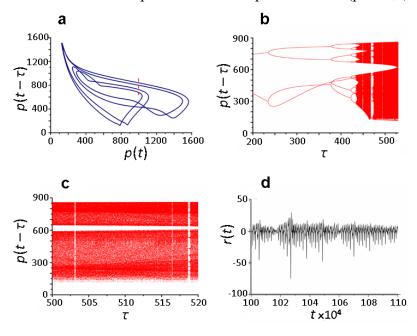
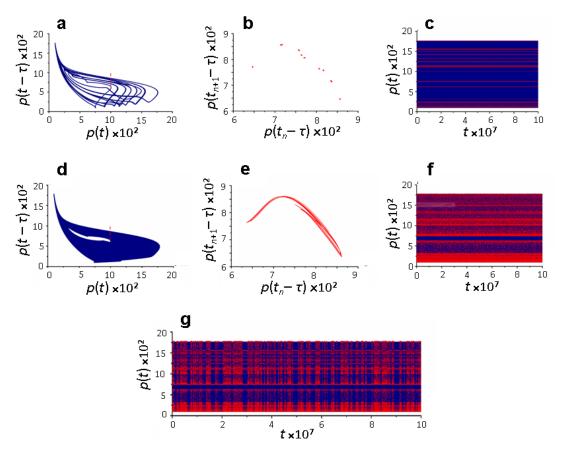


Рис. 3. Хаотическая динамика в модели (1),(2) при наборе параметров 1 (табл. 1, строка № 1). (а) — периодическое решение при  $\tau = 400$  (плоскость Пуанкаре отмечена вертикальной чертой); (b) — бифуркационная диаграмма на интервале  $200 \le \tau \le 530$ , плоскость Пуанкаре p(t) = 1000; (c) — бифуркационная диаграмма на интервале  $500 \le \tau \le 520$ , плоскость Пуанкаре p(t) = 1000,  $p(t-\tau) > 625$ ; (d) — разность между решениями двух задач с разницей  $10^{-9}$  в начальных условиях при  $\tau < t < 0$ .

На рисунке 4 приведены хаотические решения модели при значениях  $\tau = 518.91$  (рис. 4,а) и  $\tau = 520.0$  (рис. 4,с). Видно, что структура хаоса при разных значениях  $\tau$  различается, о чем свидетельствуют также соответствующие отображения Пуанкаре (рис. 4,b и 4,c). Структура перехода от хаоса при  $\tau = 518.91$  (рис. 4,е) к хаосу при  $\tau = 520.0$  (рис. 4,f), который происходит при  $\tau = 518.92$ , продемонстрирована на рисунке 4,g, где для наглядности точки экстремумов отмечены красным цветом. Видно, что переход происходит через перемежаемость типа хаос—хаос, когда хаотическое решение одного вида чередуется с хаотическим решением другого вида.



**Рис. 4.** Структура хаоса в модели (1),(2) при наборе параметров 1 (табл. 1) и разных значениях параметра запаздывания  $\tau$ . (**a**),(**d**) – странные аттракторы при  $\tau$  = 518.91 и  $\tau$  = 520.0 соответственно (плоскость Пуанкаре отмечена вертикальной чертой); (**b**), (**e**) – соответствующие отображения Пуанкаре в плоскости p(t) = 1000,  $p(t-\tau)$  > 600; (**c**),(**f**),(**g**) – хаотическое решение при  $\tau$  = 518.91,  $\tau$  = 520.00 и  $\tau$  = 518.92 соответственно в зависимости от времени (красным отмечены точки экстремумов).

Таким образом, при наборе параметров 1 в модели (1),(2) выявлены области хаотической динамики с разной структурой и разными типами перехода к хаосу.

*Набор параметров* **2** (табл. 1, строка № 2):

$$\alpha = 20$$
,  $\beta_1 = 0.001$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $K_I = 500$ ,  $K_D = 4000$ ,  $h_D = 3$ .

Для данного набора параметров цикл длины 3 для одномерного отображения (7),(2) показан на рисунке 1,b. Неустойчивость от начальных данных наблюдается при  $\tau = 646.50, 667.50, 1000, 3500.$ 

Для исследования динамических свойств уравнения (1),(2) выбираем плоскость Пуанкаре p(t) = 4500 и строим бифуркационную диаграмму решений при разных

значениях  $\tau$ . Наличие в модели (1),(2) хаотических решений при  $\tau = 670.00$  продемонстрировано на рисунке 5 (графики a, b, d).

График, изображенный на рисунке 5,b, отображает структуру хаоса в исследуемой области, а бифуркационная диаграмма, представленная на рисунке 5,d, демонстрирует множественность аттракторов. На интервале  $630 \le \tau \le 670$  численно обнаружены три ветви диаграммы (рис. 5,d). Решения первой ветви существуют до  $\tau = 646.71$ . При увеличении  $\tau$  с 646.71 до 646.72, решения переходят на вторую ветвь диаграммы, которая существует при значениях  $\tau$  на интервале [635.53,668.52]. При уменьшении  $\tau$  с 635.53 до 635.52 происходит возврат на первую ветвь диаграммы, т.е. образуется петля гистерезиса. Третья ветвь решений реализуется в области значений  $\tau \in [661.65, 670.0]$ , правая граница не определена. Из построенных диаграмм следует, что при данном наборе параметров для первой и третьей ветвей происходит переход от периодических решений к хаосу по сценарию Фейгенбаума [37, 38], т.е., через каскад удвоения периода, вторая ветвь состоит только из периодических решений. При  $\tau = 758.75$  также наблюдаются 2 ветви решений, одна из которых соответствует периодическому (рис. 5,c), а вторая — хаотическому решению (рис. 5,e).

Таким образом, при наборе параметров 2 в модели (1),(2) выявлены области значений  $\tau$ , в пределах которых существуют две ветви решений, как периодические, так и хаотические.

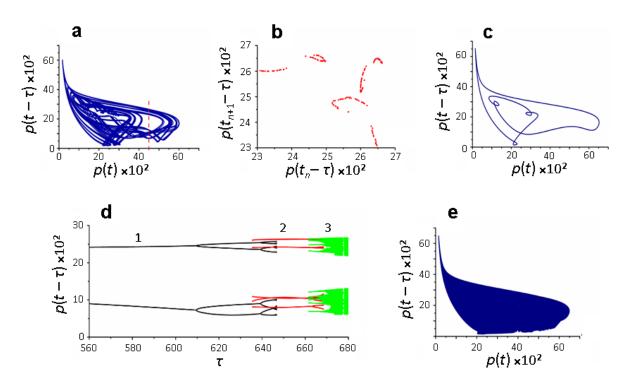


Рис. 5. Множественность решений в модели (1),(2) при наборе параметров 2 (табл. 1, строка № 2). (а) — странный аттрактор при  $\tau = 670.00$  (плоскость Пуанкаре отмечена вертикальной чертой); (b) — одностороннее отображение Пуанкаре в плоскости Пуанкаре  $p(\tau) = 4500$ ,  $p(t-\tau) > 650$ ; (d) — бифуркационная диаграмма решений на интервале  $630 \le \tau \le 670$ ; (c), (e) — два решения, периодическое и хаотическое, при  $\tau = 758.75$ .

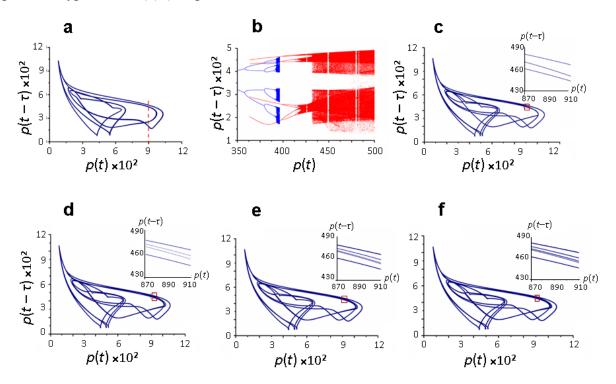
# *Набор параметров* **3** (табл. 1, строка № 3):

$$\alpha = 20$$
,  $\beta_1 = 0.001$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $K_I = 500$ ,  $K_D = 300$ ,  $h_D = 6$ .

Для данного набора параметров цикл длины 3 для одномерного отображения (7),(2) показан на рисунке 1,с. Неустойчивость от начальных данных наблюдали при  $\tau = 550$ .

Для исследования уравнения (1),(2) выбираем плоскость Пуанкаре, p(t) = 900, и строим бифуркационную диаграмму при разных значениях  $\tau$  (рис. 6).

На интервале  $350 \le \tau \le 500$  численно обнаружены две ветви диаграммы:  $\tau \in [350, 396.45]$  и  $\tau \in [363.64, 500]$ , для каждой из которых переход от периодических решений к хаосу происходит через каскад удвоения периода, т.е., по сценарию Фейгенбаума [37, 38]. На рисунках 6,с–f показан такой каскад удвоений периода решений уравнения (1),(4) при  $\tau = 448.61$ ,  $\tau = 450.0$ ,  $\tau = 450.1$ .

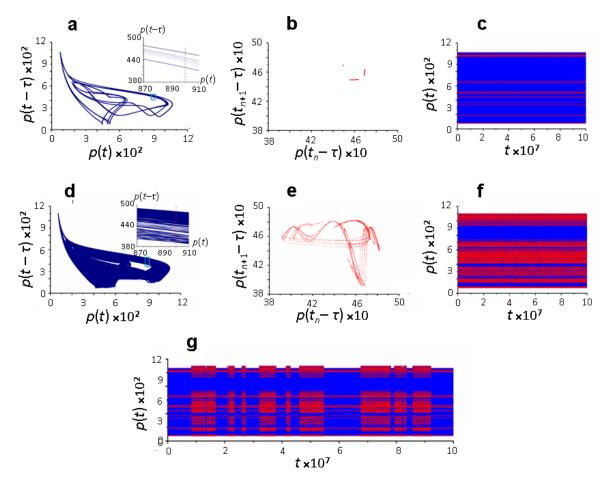


**Рис. 6.** Хаотическая динамика в модели (1),(2) при наборе параметров 3 (табл. 1). (а) — периодическое решение при  $\tau = \tau_1 = \tau_2 = 400$  (плоскость Пуанкаре отмечена вертикальной чертой); (b) — 2 ветви бифуркационной диаграммы при  $\tau \in [350, 396.45]$  и  $\tau \in [363.64, 500]$  соответственно в плоскости Пуанкаре  $p(\tau) = 900$ ; (c-f) — периодические решения периодов 3, 6, 12, 24 при  $\tau = 448.61$ ,  $\tau = 450.0$ ,  $\tau = 450.1$ ,  $\tau = 450.14$  соответственно. Красными квадратиками показана область расположения встроенных графиков.

На рисунке 7 показана структура хаоса при значениях  $\tau = 450.27$  (рис. 7,a–c) и  $\tau = 451.0$  (рис. 7,d–f). О различии в структурах хаоса свидетельствуют соответствующие виды отображения Пуанкаре (рис. 7,b и 7,e).

Структура перехода от одного типа хаоса при  $\tau = 450.27$  (рис. 7,c) к другому, при  $\tau = 451.0$  (рис. 7,f), который происходит при  $\tau = 450.28$ , продемонстрирована на рисунке 7,g, где для наглядности точки экстремумов отмечены красным цветом. Видно, что переход происходит через перемежаемость типа хаос—хаос, когда хаотическое решение одного вида чередуется с хаотическим решением другого вида.

В целом можно заключить, что при наборах параметров 1, 2 и 3 в модели (1),(2) хаотическая динамика обнаруживается в широком диапазоне значений запаздывающего аргумента и от его значения существенно зависит как структура хаотической динамики, так и типы перехода к хаосу.



**Рис. 7.** Структура хаоса в модели (1),(4) при наборе параметров 3 (табл. 1) и разных значениях  $\tau$ . (a),(d) — странные аттракторы при  $\tau = 450.27$  и  $\tau = 451$  соответственно (плоскость Пуанкаре отмечена вертикальной чертой, место расположения встроенного графика голубым квадратом); (b), (e) — соответствующие отображения Пуанкаре в плоскости p(t) = 900,  $p(t-\tau) > 380$ ; (c), (f), (g) — вид хаотического решения в зависимости от времени при  $\tau = 451.0$ ,  $\tau = 450.27$  и  $\tau = 450.28$ ), соответственно (красным отмечены точки экстремумов).

Итог анализа полученных данных подведем в виде следующей обобщающей гипотезы под названием эмпирический критерий достаточности существования хаоса в уравнении с запаздывающими аргументами вида (1):

Если одномерное отображение

$$x_{n+1} = F(x_n), F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

отображает некоторый отрезок в себя и является хаотическим, то уравнение (1) при некотором значении тимеет хаотический аттрактор.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установление свойств фазового портрета для диссипативной динамической системы является классической проблемой теории динамических систем. Для нелинейных дифференциальных систем уравнений она настолько сложна, что является решенной только для одномерного случая, в котором в качестве аттракторов могут присутствовать только стационары. Но уже для двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (запаздывающие аргументы отсутствуют), фазовый портрет которых может содержать только стационары и циклы, она до сих пор не имеет решения. Более того, уже более 100 лет остается нерешенной 16-я проблема Гильберта

числа предельных циклов y двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по строению ее правой полиномиальной части. Доказано только, что количество предельных циклов конечно [40-42]. Для систем дифференциальных уравнений c запаздывающими аргументами установления свойств фазового портрета выглядит еще более неподъемной, так как уже в единственном дифференциальном уравнении с единственным запаздывающим аргументом легко обнаруживаются не только стационарные и циклические аттракторы, но и квазициклические, и хаотические [2, 3, 6]. В этом случае единственным методом исследования свойств фазового портрета является численный эксперимент, который состоит в проведении серии компьютерных решений задачи Коши для целевой системы в пространстве варьируемых параметров модели и пространстве начальных данных. Данный способ анализа по своей сути является экстенсивным и часто предъявляет существенные требования и к памяти, и к быстродействию компьютеров. В этом случае, едва ли не единственным способом повышения эффективности анализа фазовых портретов является учет специфических особенностей строения того или иного типа динамических систем.

В данной работе мы рассмотрели уравнение с запаздывающим аргументом специального вида (1). Оно широко используется для моделирования природных и искусственных молекулярно-генетических систем [1–11]. Поэтому выработка эффективных алгоритмов анализа строения его фазового портрета для разных типов управляющих функций f и g является актуальной задачей математической теории гена.

Представленные в работе численные результаты, демонстрируют тесную взаимосвязь между одномерными отображениями, порождаемыми отношением управляющих функций f/g и хаотическими свойствами уравнения с запаздывающими аргументами (1). Мы суммировали их в виде эмпирического критерия достаточности наличия хаотического потенциала у уравнения вида (1). Критерий позволяет эффективно проводить анализ хаотического потенциала уравнения (1), разделив его на две стадии. На первом этапе определяются значения параметров управляющих функций f и g, при которых одномерное отображение f/g является хаотическим. При этом не требуется численного интегрирования дифференциального уравнения (1). На втором этапе осуществляется поиск значений запаздывающего аргумента  $\tau$  и начальных условий, при которых у уравнения (1) для найденного набора параметров реализуется хаотическая динамика.

В заключение отметим, что представленный эмпирический критерий не является строго доказанным утверждением. Мы не исключаем, что приведенная формулировка слишком широка и требует уточнения.

Работа выполнена в рамках государственного задания по проекту № 0324-2016-0008 и при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00237а)

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Likhoshvai V.A., Kogai V.V., Fadeev S.I., Khlebodarova T.M. Alternative splicing can lead to chaos. *J. Bioinform. Comput. Biol.* 2015. V. 13. Article No. 1540003.
- 2. Khlebodarova T.M., Kogai V.V., Fadeev S.I., Likhoshvai V.A. Chaos and hyperchaos in simple gene network with negative feedback and time delays. *J. Bioinform. Comput. Biol.* 2017. V. 15. No. 2. Article No. 1650042. doi: 10.1142/S0219720016500426
- 3. Likhoshvai V.A., Kogai V.V., Fadeev S.I., Khlebodarova T.M. Chaos and hyperchaos in a model of ribosome autocatalytic synthesis. *Sci. Rep.* 2016. V. 6. Article No. 38870. doi: 10.1038/srep38870

- 4. Когай В.В., Хлебодарова Т.М., Фадеев С.И., Лихошвай В.А. Сложная динамика в системах альтернативного сплайсинга мРНК: математическая модель. Вычислительные технологии. 2015. Т. 20. № 1. С. 38–52.
- 5. Suzuki Y., Lu M., Ben-Jacob E., Onuchic J.N. Periodic, Quasi-periodic and chaotic dynamics in simple gene elements with time delays. *Sci. Rep.* 2016. V. 6. Article No. 21037. doi: 10.1038/srep21037
- 6. Mackey M.C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*. 1977. V. 197. P. 287–289.
- 7. Perez F.J., Malta C.P., Coutinho F.A. Qualitative analysis of oscillations in isolated populations of flies. *J. Theor. Biol.* 1978. V. 71. № 4. P. 505–514.
- 8. Ikeda K., Matsumoto K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback. *Physica D.* 1987. V. 29. P. 223–235.
- 9. Bastos de Figueiredo J.C., Diambra L., Glass L., Malta C.P. Chaos in two-looped negative feedback systems. *Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft. Matter. Phys.* 2002. V. 65. Article No. 051905.
- 10. Kogai V.V., Likhoshvai V.A., Fadeev S.I., Khlebodarova T.M. Multiple scenarios of transition to chaos in the alternative splicing model. *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 2017. V. 27. Article No. 1730006. doi: 10.1142/S0218127417300063
- 11. Likhoshvai V.A., Fadeev S.I., Kogai V.V., Khlebodarova T.M. On the chaos in gene networks. *J. Bioinform. Comput. Biol.* 2013. V. 11. № 1. Article No. 1340009.
- 12. Benincà E., Ballantine B., Ellner S.P., Huisman J. Species fluctuations sustained by a cyclic succession at the edge of chaos. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2015. V. 112. № 20. P. 6389–6394.
- 13. Varona P., Rabinovich M.I., Selverston A.I., Arshavsky Y.I., Winnerless competition between sensory neurons generates chaos: A possible mechanism for molluscan hunting behavior. *Chaos.* 2002. V. 12. № 3. P. 672–677.
- 14. Ermentrout B., Campbell J., Oster G. A model for shell patterns based on neural activity. *Veliger*. 1986. V. 28. P. 369–388.
- 15. Meinhardt H. *The Algorithmic Beauty of Sea Shells*. Third Edition. Heidelberg: Springer, 2003.
- 16. Meinhardt H., Klingler M. A model for pattern-formation on the shells of molluscs. *J. Theor. Biol.* 1987. V. 126. P. 63–89.
- 17. Philippe P. Chaos, population biology, and epidemiology: some research implications. *Hum. Biol.* 1993. V. 65. № 4. P. 525–546.
- 18. Constantino R.F., Desharnais R.A., Cushing J.M., Dennis B. Chaotic dynamics in an insect population. *Science*. 1997. V. 275. P. 389–391.
- 19. Dennis B., Desharnais R.A., Cushing J.M., Henson S. M., Costantino R.F. Estimating chaos and complex dynamics in an insect population. *Ecological Monographs*. 2001. V. 71. № 2. P. 277–303.
- Dennis B., Desharnais R.A., Cushing J.M., Costantino R.F. Transitions in population dynamics: equilibra to periodic cycles to aperiodic cycles. *J. Anim. Ecol.* 1997. V. 66. P. 704–729.
- 21. Maquet J., Letellier C., Aguirre L.A. Global models from the Canadian lynx cycles as a direct evidence for chaos in real ecosystems. *J. Math. Biol.* 2007. V. 55. № 1. P. 21–39.
- 22. Garfinkel A., Chen P.S., Walter D.O., Karagueuzian H.S., Kogan B., Evans S.J., Karpoukhin M., Hwang C., Uchida T., Gotoh M., Nwasokwa O., Sager P., Weiss J.N. Quasiperiodicity and chaos in cardiac fibrillation. *J. Clin. Invest.* 1997. V. 99. № 2. P. 305–314.
- 23. Qu Z. Chaos in the genesis and maintenance of cardiac arrhythmias. *Prog. Biophys. Mol. Biol.* 2011. V. 105. № 3. P. 247–257.

- 24. Holstein-Rathlou N.H. Oscillations and chaos in renal blood flow control. *J. Am. Soc. Nephrol.* 1993. V. 4. № 6. P. 1275–1287.
- 25. Korn H., Faure P. Is there chaos in the brain? II. Experimental evidence and related models. *C. R. Biol.* 2003. V. 326. P. 787–840.
- 26. Gu H.G., Jia B., Chen G.R. Experimental evidence of a chaotic region in a neural pacemaker. *Phys. Lett. A.* 2013. V. 377. № 9. P. 718–720.
- 27. Gu H. Experimental observation of transition from chaotic bursting to chaotic spiking in a neural pacemaker. *Chaos*. 2013. V. 23. № 2. Article No. 023126. doi: 10.1063/1.4810932
- 28. Leloup J.C., Goldbeter A. Chaos and birhythmicity in a model for circadian oscillations of the PER and TIM proteins in Drosophila. *J. Theor. Biol.* 1999. V. 198. № 3. P. 445–459.
- 29. Leloup J.C., Gonze D., Goldbeter A. Limit cycle models for circadian rhythms based on transcriptional regulation in Drosophila and Neurospora. *J. Biol. Rhythms*. 1999. V. 14. № 6. P. 433–448.
- 30. Romond P.C., Rustici M., Gonze D., Goldbeter A. Alternating oscillations and chaos in a model of two coupled biochemical oscillators driving successive phases of the cell cycle. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 1999. V. 879. P. 180–193.
- 31. Goldbeter A., Gonze D., Houart G., Leloup J.C., Halloy J., Dupont G. From simple to complex oscillatory behavior in metabolic and genetic control networks. *Chaos.* 2001. V. 11. P. 247–260.
- 32. Ciliberto A., Novak B., Tyson J.J. Mathematical model of the morphogenesis checkpoint in budding yeast. *J. Cell. Biol.* 2003. V. 163. № 6. P. 1243–1254.
- 33. Gérard C., Goldbeter A. From simple to complex patterns of oscillatory behavior in a model for the mammalian cell cycle containing multiple oscillatory circuits. *Chaos*. 2010. V. 20. № 4. Article No. 045109. doi: 10.1063/1.3527998
- 34. Zhang Z., Ye W., Qian Y., Zheng Z., Huang X., Hu G. Chaotic motifs in gene regulatory networks. *PLoS One*. 2012. V. 7. № 7. Article No. e39355.
- 35. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Introduction to the theory of differential equations with deviating argument*. Nauka: Moskow, 1971.
- 36. Likhoshvai V., Ratushny A. Generalized hill function method for modeling molecular processes. *J. Bioinform. Comput. Biol.* 2007. V. 5. № 2B. P. 521–231.
- 37. Feigenbaum M.J. Universal Behavior in Nonlinear Systems. *Los Alamos Science*. 1980. V. 1. № 1. P. 4–27.
- 38. Feigenbaum M.J. The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations. *J. Stat. Phys.* 1979. V. 21. P. 669–706.
- 39. Li T.Y., Yorke J.A. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly.* 1975. V. 82. № 10. P. 985–992.
- 40. Ильяшенко Ю.С. Теоремы конечности для предельных циклов. *Успехи Матем. Наук.* 1990. Т. 45. № 2(272). С. 143–200.
- 41. Ильяшенко Ю.С. Теоремы конечности для предельных циклов: схема обновленного доказательства. *Изв. РАН. Сер. матем.* 2016. Т. 80. № 1. С. 55–118.
- 42. Écalle J. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Paris: Hermann, 1992. (Actualites mathématiques).

Рукопись поступила в редакцию 25.09.2017. Дата опубликования 07.11.2017.