

УДК: 574.34

## **Фазовая мультистабильность колебательных режимов динамики модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром**

**Шлюфман К.В.<sup>\*1</sup>, Неверова Г.П.<sup>\*\*1,2</sup>, Фрисман Е.Я.<sup>\*\*\*1</sup>**

<sup>1</sup>*Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Биробиджан,  
Еврейская автономная область, Россия*

<sup>2</sup>*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия*

**Аннотация.** В работе исследуется фазовая мультистабильность динамических режимов, возникающих в уравнении Рикера с мальтузианским параметром, циклически меняющимся с периодом длины два. Показано, что в результате либо возмущения переменной, либо сдвига фазы мальтузианского параметра, можно наблюдать, как сдвиг фазы в динамическом режиме, так и смену существующего режима на новый. Возможность перехода между разными динамическими режимами обусловлена мультистабильностью: модель имеет два разных устойчивых 2-цикла. Возникший, в результате транскритической бифуркации первый устойчивый 2-цикл синхронен колебаниям мальтузианского параметра, а возникший в результате касательной бифуркации второй устойчивый 2-цикл – асинхронен. Это свидетельствует о том, что 2-циклы колебаний численности, в периодически изменяющейся среде могут быть, как синхронны, так и асинхронны колебаниям среды обитания. Сдвиг фазы мальтузианского параметра вызывает сдвиг на одну или даже на три фазы у устойчивого 4-цикла первой серии бифуркаций. Сдвиг на две фазы этого 4-цикла возможен при изменении полуамплитуды колебания мальтузианского параметра или при возмущении по переменной. При этом, чем больше длина цикла, тем больше он имеет фаз со своими бассейнами притяжения и тем меньше пороговые значения, при превышении которых происходит перескок из одного бассейна в другой. В результате, возмущения, которые устойчивые циклы малой длины способны «поглотить», в случае циклов большей длины (например, 8-цикл) могут вызвать различные фазовые переходы, что в итоге существенно усложняет динамику модельной траектории и делает практически невозможным идентификацию наблюдаемого динамического режима.

**Ключевые слова:** популяционная динамика, периодически изменяющийся мальтузианский параметр, математическое моделирование, динамические режимы, мультистабильность, фазовая мультистабильность, бассейны притяжения.

### **ВВЕДЕНИЕ**

В теории динамических систем огромное количество работ посвящено изучению фазовой мультистабильности в задачах о связанных осцилляторах [1–5]. В рамках математической популяционной биологии синхронность и асинхронность колебаний изучается преимущественно для взаимодействующих [6–11] или разделенных в

<sup>\*</sup>Shlufman@mail.ru

<sup>\*\*</sup>Galina.nev@gmail.com

<sup>\*\*\*</sup>Frisman@mail.ru

пространстве популяций [12, 13]. При этом для локальных однородных популяций синхронность и асинхронность динамических режимов практически не рассматриваются, хотя известны случаи, когда в рамках двух идентичных популяций, обитающих в схожих условиях, наблюдаются противофазные колебания. В частности, в лабораторных экспериментах [14] показано, что при одной и той же начальной численности и схожих условиях в популяциях мучного хрущака (*Tribolium castaneum*) могут наблюдаться два разных противофазных периодических режима. Помимо смены фазы колебаний, в реальных локальных популяциях также возможна смена периода колебаний или даже характера динамики. Например, у многих видов полевков наблюдаются двух-трехлетние периодические колебания численности [15, 16], а в популяциях лемминга (*Lemmus lemmus*) на Юге Норвегии [17] и красно-серой полевки (*Clethrionomys rufocanus*), обитающей в Финляндии [18], ярко выраженные циклические изменения численности исчезли.

Описанные экологические явления в математических популяционных моделях проявляются как мультистабильность [19, 20]. При этом следует понимать, что изменение в модели характера динамики может произойти не только в случае существования нескольких аттракторов при одних и тех же значениях параметров, но и вследствие фазовой мультистабильности, когда под действием возмущения переменной уравнения модельная траектория осуществляет прыжки по бассейнам притяжения разных фаз одного и того же динамического режима. Например популяция тихоокеанской горбуши (*Oncorhynchus gorbuscha*), имеет две репродуктивно изолированные субпопуляции четных и нечетных лет, порождающие двухлетний цикл [21]. Естественно ожидать, что изменение численности для одной из субпопуляций, влекущее за собой смещение из одного бассейна притяжения в другой, может привести к смене фазы колебаний в популяции в целом. При этом, чем больше период наблюдаемых колебаний, тем больше фаз этого цикла со своими бассейнами притяжения может существовать, что в условиях нестационарной среды может существенно усложнять динамику.

Данная работа посвящена исследованию фазовой мультистабильности и ее влиянию на характер динамики модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром [22, 23]. Следует отметить, что модель Рикера с учетом факторов внешней среды весьма успешно применяется для описания динамики реальных популяций [24–26]. Мы изучаем частный случай, когда условия среды обитания популяции изменяются периодически. Следует отметить, что модель такого характера, может быть использована для описания и анализа динамики популяций видов, численность которых определяется циклически изменяющимися факторами. Например, численность белки зависит от обилия кормовых ресурсов, а именно кедр, который обильно плодоносит раз в несколько лет [27, 28].

Следует отметить, что, не смотря на большое количество работ, имеющих отношение к уравнению Рикера с периодическим параметром [22, 23, 29–37], полного и подробного исследования динамических режимов с учетом фазовой мультистабильности в этих моделях до сих пор не проводилось. В данной публикации приводятся результаты, позволяющие заполнить некоторые из этих пробелов. Исследование такого характера позволяет получить полное представление о динамических режимах в уравнении Рикера с периодическим параметром и возможных сценариях их изменения, что в свою очередь необходимо учитывать при изучении динамики популяций, законы развития которых могут быть описаны подобной моделью.

## УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

Уравнение Рикера с периодическим мальтузианским параметром, позволяющее учитывать циклические воздействия, как экзогенной, так и эндогенной природы, на численность популяции, является модификацией модели запас-пополнения [38] и имеет вид:

$$x_{n+1} = \alpha_n \cdot x_n \cdot \exp(-\beta \cdot x_n), \quad (1)$$

где переменная  $x_n$  интерпретируется как значение численности рассматриваемой популяции в момент времени  $n = 0, 1, \dots$ . Коэффициент  $\alpha_n$  – периодический мальтузианский параметр (т.е.  $\alpha_{n+k} = \alpha_n$  для любого  $n \geq 0$ , где  $k$  – период), который соответствует репродуктивному потенциалу популяции (скорость роста популяции «в пустоту») и определяется биологическими особенностями вида. Параметр  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) характеризует «емкость» экологической ниши популяции. Нетрудно показать, что из уравнения (1) без потери общности, с помощью замены переменной, может быть исключен параметр  $\beta$ :

$$x_{n+1} = \alpha_n \cdot x_n \cdot \exp(-x_n). \quad (2)$$

Дальнейшее исследование модели (2) будет ориентировано на случай, когда период параметра  $\alpha_n$  составляет два года, т.е.  $k = 2$ , в этом случае удобен переход к новым параметрам  $\alpha$  и  $\rho$ :

$$\alpha = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{2}.$$

Тогда, если  $\alpha_0 = \max(\alpha_n)$ , то уравнение (2) может быть записано в виде:

$$x_{n+1} = x_n \cdot (\alpha + (-1)^n \cdot \rho) \cdot \exp(-x_n). \quad (3)$$

Параметр  $\alpha$  в уравнении (3) соответствует среднему значению мальтузианского параметра, относительно которого происходят колебания, а коэффициент  $\rho$  – амплитуде колебаний. Так как мальтузианский параметр имеет смысл только при положительных значениях, то величина  $\alpha \pm \rho$  должна быть строго больше нуля. Отсюда возникает естественное условие  $|\rho| < \alpha$ .

Заметим, что полученное представление (3), также как и (2), является неавтономным рекуррентным уравнением, которое может быть сведено к автономной системе путем расширения фазового пространства. В данном случае для увеличения размерности фазового пространства удобно ввести новую фазовую переменную  $\rho$ . Соответственно, уравнение (3) принимает вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot (\alpha + \rho_n) \cdot \exp(-x_n), \\ \rho_{n+1} = -\rho_n, \end{cases} \quad (4)$$

где  $|\rho_n|$  – полуамплитуда колебаний мальтузианского параметра, причем  $|\rho_n| < \alpha$ . Перенос  $\rho$  из пространства параметров в пространство фазовых переменных накладывает на поведение  $\rho$  следующее ограничение: переменная  $\rho_n$  меняет только знак, сохраняя свое значение по модулю. Поэтому, результаты экстраполирования полученных результатов при исследовании системы (4) на уравнение (3) требуют проверки корректности.

Следует отметить, что сдвиг фазы периодического мальтузианского параметра для начального условия  $x_0$  в уравнении (3) эквивалентен изменению знака переменной  $\rho$  при начальном условии  $(x_0, \rho_0)$  в системе (4).

## СТАЦИОНАРНЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (3). УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Уравнение (3) имеет тривиальное стационарное решение

$$x = 0, \quad (5)$$

которое существует при всех допустимых значениях параметров  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) и  $\rho$  ( $0 < \rho < \alpha$ ) и не зависит от их значений. Вместе с тем, решение (5) соответствует целому классу полутривиальных решений: 2-циклам системы (4) с координатами  $(0, \rho)$  и  $(0, -\rho)$ , включая тривиальное решение.

Границы области устойчивости решения (5) определяются равенством:

$$\alpha^2 - \rho^2 = 1. \quad (6)$$

При переходе через границу  $\alpha^2 - \rho^2 = 1$ , когда,  $\rho \neq 0$ , на смену потерявшему устойчивость тривиальному решению (5) приходит устойчивый 2-цикл, область устойчивости которого ограничивается линией, соответствующей потере устойчивости по сценарию Фейгенбаума:

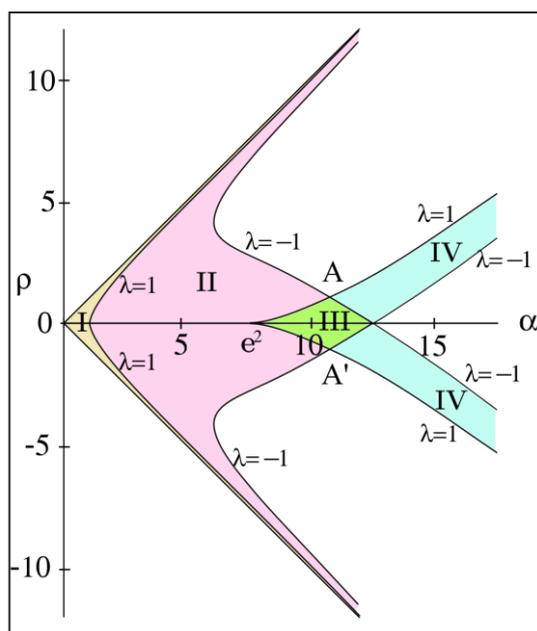
$$\rho^*(\alpha) = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{2-x}{x \cdot (1-x)} \cdot \exp(x) + \frac{x \cdot (1-x)}{2-x} \cdot \exp\left(\frac{2-x}{1-x}\right) \right], \\ \rho = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{2-x}{x \cdot (1-x)} \cdot \exp(x) - \frac{x \cdot (1-x)}{2-x} \cdot \exp\left(\frac{2-x}{1-x}\right) \right]. \end{cases} \quad (7)$$

Также в уравнении (3) возникает касательная бифуркация, в результате которой рождается полуустойчивая особая точка (2-цикл уравнения (3)). Граница, соответствующая касательной бифуркации, имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_{bif} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{e^x}{x-1} + (x-1) \cdot e^{\left(\frac{x}{x-1}\right)} \right] \\ \rho_{bif} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{e^x}{x-1} - (x-1) \cdot e^{\left(\frac{x}{x-1}\right)} \right] \end{cases} \text{ при } x > 1, x \neq 2. \quad (8)$$

и при переходе через нее возникают два 2-цикла, устойчивый и неустойчивый. Методология поиска границ (7) и (8) в параметрическом виде подробно описана в работе [22].

Границы (6), (7) и (8) формируют параметрический портрет уравнения Рикера с мальтузианским параметром периода 2 и представлены на рисунке 1. Как видно, область устойчивости тривиального решения задается неравенствами  $-\alpha < \rho < \alpha$  и  $\alpha^2 - \rho^2 < 1$ . При переходе через границу (6) ( $\alpha^2 - \rho^2 = 1$ ) происходит транскритическая бифуркация [39], в результате которой тривиальное равновесие и периодическое решение уравнения (3) обмениваются устойчивостью, т.е. нулевое решение теряет устойчивость, а периодическое приобретает. Область локальной асимптотической устойчивости периодического решения уравнения (3) заключена между границами (6) и (7). График (8) является границей, по которой проходит касательная бифуркация. При переходе через нее возникает еще один устойчивый 2-цикл уравнения (3), область устойчивости которого формируется кривыми (7) и (8). Таким образом, линия (8) отделяет область «единственности» устойчивого 2-цикла от области мультистабильности, в которой могут сосуществовать 2 разных устойчивых 2-цикла. Следует отметить, что оба 2-цикла теряют устойчивость через удвоение периода (рис. 1).



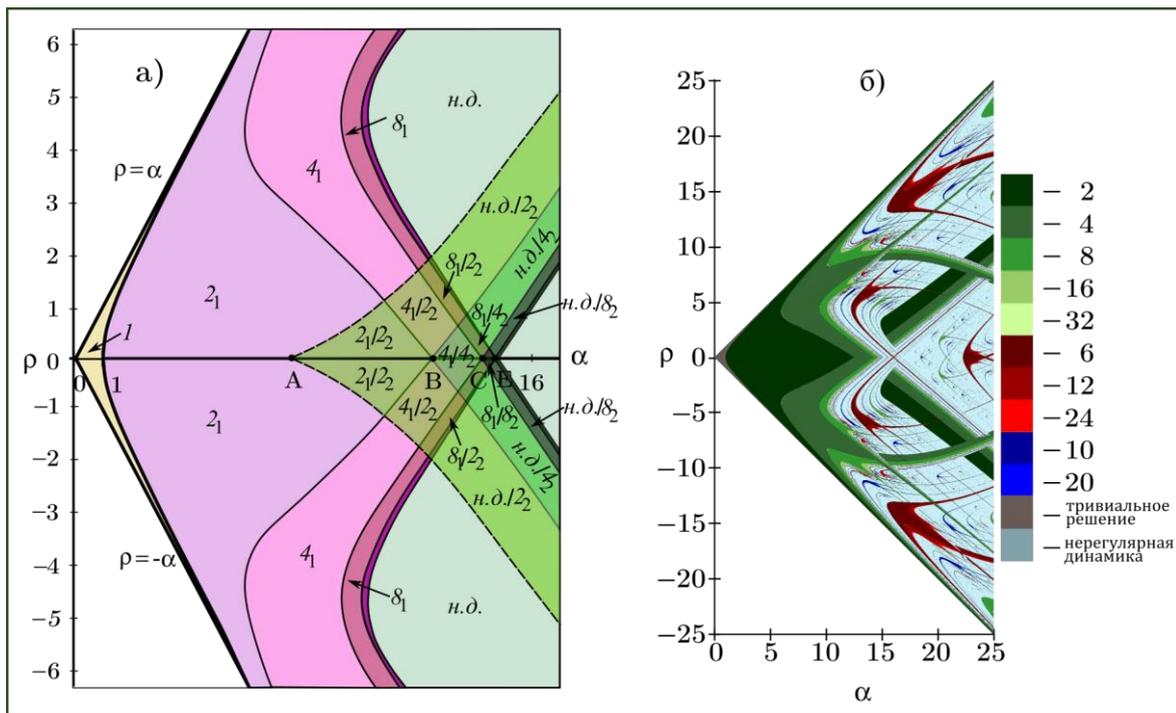
**Рис. 1.** Параметрические портрет уравнения (3): I – устойчиво тривиальное решение; II – устойчив единственный 2-цикл (первый 2-цикл); III – устойчивы 2 разных 2-цикла; IV – сосуществуют устойчивый второй 2-цикл и динамические режимы, возникшие в результате бифуркации первого 2-цикла.

Для исследования возникающих и сосуществующих динамических режимов уравнения Рикера с двухлетним периодических мальтузианским параметром была построена карта динамических режимов. Для этого использовался метод сканирования, позволяющий обнаруживать как глобально, так и локально асимптотически устойчивые решения в условиях мультистабильности. В диапазоне  $(0, \ln(\alpha + \rho)]$  последовательно с малым шагом перебирались начальные состояния  $x_0$  уравнения (3) для каждой фиксированной пары значений параметров  $\alpha$  и  $\rho$  на узлах прямоугольной равномерной сетки, покрывающей область  $\{(\alpha, \rho) \mid 0 \leq \alpha \leq 17, 0 \leq \rho \leq 6.2\}$ . Далее итерационным вычислением находилось решение, из которого исключается переходный режим, вызванный начальным состоянием  $x_0$ . Оставшаяся часть решения использовалась для определения асимптотически устойчивого периодического решения, в бассейн притяжения которого попало выбранное начальное состояние  $x_0$ . Таким образом, для каждой пары значений  $(\alpha, \rho)$  накапливались сведения об имеющихся периодических и хаотических решениях уравнения (3), на которые оно выходит при разных начальных условиях  $x_0$ . Карта динамических режимов, построенная по результатам сканирования, представлена на следующем рисунке (рис. 2,а). Следует отметить, что для простоты восприятия мелкие области устойчивости циклов с периодами 16 и более (продолжающих серию бифуркаций до появления хаоса), объединены в одну область.

Поясним карту на рисунке 2,а. В области 1 устойчиво нулевое стационарное решение. При выходе из нее (в сторону больших значений параметра  $\alpha$ ) тривиальное решение теряет устойчивость, а первый 2-цикл её приобретает. Область устойчивости этого 2-цикла состоит из частей  $2_1$  и  $2_{1/2}$ . В части  $2_1$  первый 2-цикл – единственно возможное устойчивое решение. В области  $2_{1/2}$  первый 2-цикл делит фазовое пространство уравнения (3) со вторым устойчивым 2-циклом, возникшим в результате касательной бифуркации. Линия, на которой происходит касательная бифуркация, проходит через точку сборки  $A(e^2, 0)$  ( $e^2 \approx 7.38$ ). На карте она обозначена пунктиром. Заметим, что область  $2_{1/2}$  (устойчивости первого и второго 2-циклов) включают в себя интервал  $(A, B) \approx (7.38, 12.49)$  оси абсцисс  $O\alpha$ , на котором устойчив 2-цикл классического уравнения Рикера [40]. Дальнейшая эволюция первого 2-цикла

происходит по сценарию Фейгенбаума. В результате удвоения периода 2-цикл теряет устойчивость, и ему на смену приходит устойчивый 4-цикл. Область его устойчивости обозначена через  $4_1$ ,  $4_1/2_2$  и  $4_1/4_2$ . Второй 2-цикл, также как и первый, эволюционирует в хаос по сценарию Фейгенбаума. Возникающие в результате этой эволюции периодические решения в тексте именуется как «вторые».

Таким образом, мультистабильность имеет место там, где находится область устойчивости циклов второй серии бифуркации. Причем мультистабильность проявляется в двух качественно разных сочетаниях. Первое сочетание – это два устойчивых периодических решения, одно из которых относится к первой серии бифуркаций, а второе ко второй. Второе сочетание – это устойчивое периодическое решение второй серии бифуркаций и непериодическое решение, возникшее по сценарию Фейгенбаума в первой серии бифуркаций.



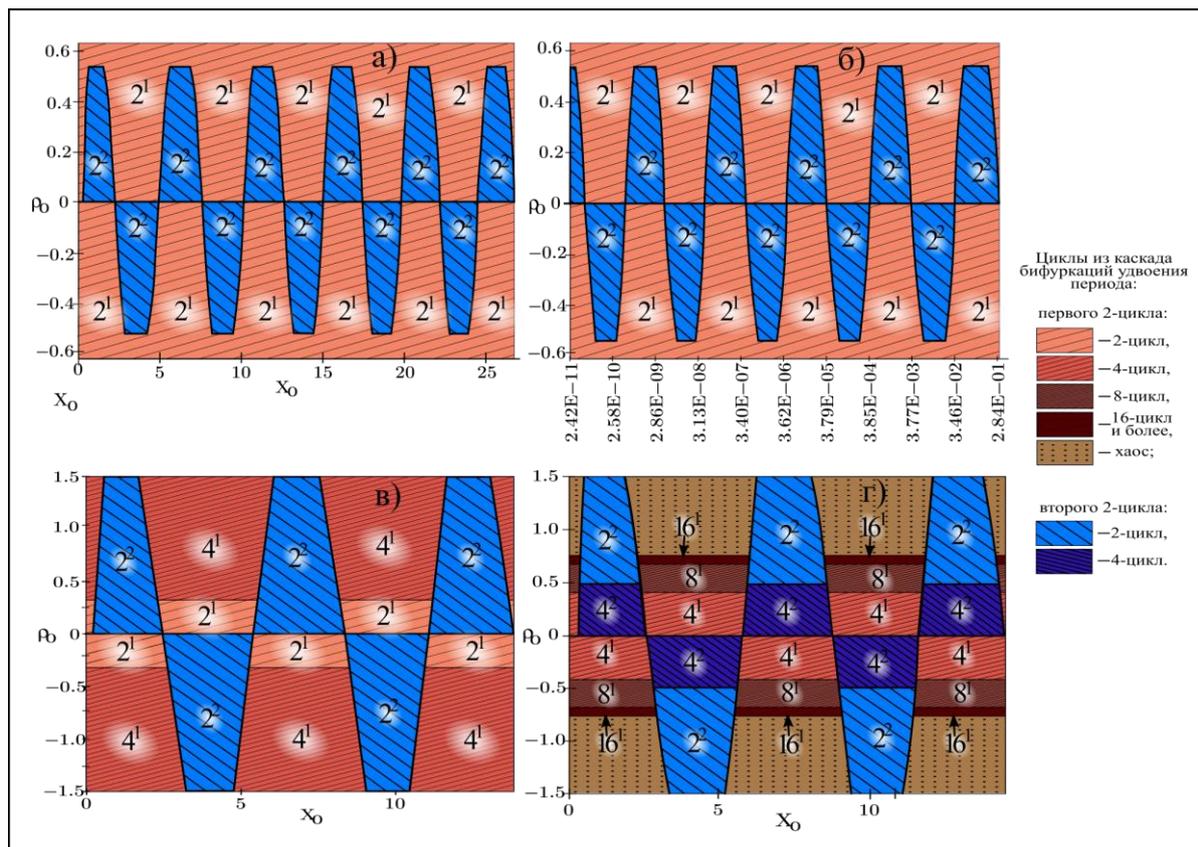
**Рис. 2.** Карта устойчивых динамических режимов уравнения (3): **а)** – с учетом их сосуществования, где *н.д.* – нерегулярная динамика;  $X_Y$  – область устойчивости  $X$ -цикла из  $Y$  серии бифуркации удвоения периода;  $/$  – область мультистабильности; **б)** – при фиксированном начальном условии  $x_0 = 1$ .

Более подробное представление о режимах динамики, возникающих в области неустойчивости, позволяет получить карта динамических режимов, построенная для конкретных начальных условий (рис. 2,б). Визуальный анализ карты позволяет заключить что, при значениях полуамплитуды  $\rho \neq 0$  бифуркация удвоения периода первого 2-цикла происходит при меньших значениях параметра  $\alpha$ , чем у классического уравнения Рикера (т.е. при  $\rho = 0$ ). При этом для второго 2-цикла, возникшего в результате касательной бифуркации, справедливо обратное утверждение: с ростом полуамплитуды этот цикл возникает при больших значениях, чем  $\alpha = e^2$ .

Отметим, что циклы нечетной длины возможны только при  $\rho = 0$ , а при  $\rho \neq 0$  существуют только циклы четной длины (кратные периоду мальтузианского параметра). Следовательно, если мальтузианский параметр колеблется с периодом 2, циклы нечетной длины не наблюдаются. Вместо них в уравнении (3) возникают циклы с удвоенным периодом, которые бифурцируют по сценарию Фейгенбаума: 6, 12, ..., 10, 20, ..., 14, 28, ... и т.д.

## БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Явление мультистабильности сопряжено с делением фазового пространства на бассейны притяжений различными динамическими режимами. На рисунке 3 представлены карты бассейнов притяжений асимптотических решений системы (4) в плоскости  $(x, \rho)$  при фиксированных значениях  $\alpha$ . При построении карт бассейнов притяжения в ограниченной области плоскости  $(x, \rho)$  с мелким шагом перебирались начальные состояния  $(x_0, \rho_0)$  и находились соответствующие решения системы (4). Каждое решение вычислялось на протяжении 5000 итераций, а по результатам последних 500 шагов определялся период предельного цикла. На карте бассейнов притяжений устойчивых решений точка  $(x_0, \rho_0)$  окрашивалась в заданный цвет в соответствии с полученным периодом (рис. 3).



**Рис. 3.** Карты бассейнов притяжений системы (4) в фазовом пространстве  $(x, \rho)$  при фиксированных значениях параметра  $\alpha$ : **а–б)**  $\alpha = 9.5$ , **в)**  $\alpha = 12$ , **г)**  $\alpha = 13.5$ . Числа соответствуют длинам наблюдаемых циклов. Индекс указывает на принадлежность режима к циклам серии бифуркаций удвоения периода первого или второго 2-цикла, соответственно.

Как видно, при  $\alpha = 9.5$  бассейны притяжения двух сосуществующих 2-циклов уравнения (3) для фиксированного значения  $\rho_0 = \rho_{fix}$ , не превышающего бифуркационное значение  $\rho \approx 0.57$ , представляют собой последовательность чередующихся интервалов на прямой  $\rho_0 = \rho_{fix}$ , исходящей из точки  $(0, \rho_0)$  в плоскости  $(x_0, \rho_0)$  (рис. 3,а). Это означает, что при одной и той же амплитуде  $\rho$  колебаний мальтузианского параметра при разных начальных  $x_0$  в уравнении (3) могут наблюдаться два разных 2-цикла. При этом с увеличением амплитуды колебаний интервалы, соответствующие областям притяжения второго 2-цикла, сужаются, а бассейн притяжения первого 2-цикла расширяется. Превышение амплитудой  $\rho$  бифуркационного значения (8) приводит к исчезновению областей притяжения второго 2-цикла, и, как следствие, во всем фазовом пространстве остается только один устойчивый первый 2-цикл. На рисунке 3,б при  $\alpha = 12$  карта содержит бассейны

четырёх динамических режимов: второго 2-цикла, первого 2-цикла и возникающих из него 4- и 8-циклы (результат бифуркации удвоения периода первого 2-цикла). Как и ранее, бассейн притяжения второго 2-цикла с увеличением абсолютного значения  $\rho$  заметно сужается.

В целом на рисунке 3 видно, что с ростом значения параметра  $\alpha$  наблюдается усложнение структуры карт бассейнов притяжения: увеличивается число возможных динамических режимов. Однако интерпретируя данные карты, можно сказать следующее: при любом фиксированном значении амплитуды колебаний  $\rho$  мальтузианского параметра  $\alpha$  структура бассейнов притяжения уравнения (3) не меняется: возможно сосуществование только двух динамических режимов.

### ФАЗОВАЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Фазовая мультистабильность является одним из случаев мультистабильности, когда сосуществующие аттракторы отличаются друг от друга значениями разности фаз между колебаниями системы [4]. Рассмотрим это явление в системе (4). На рисунках 4 и 5 представлены карты фазовой мультистабильности построенные в расширенном фазовом пространстве  $(x, \rho)$  системы (4) при  $\alpha = 8.5$  и  $\alpha = 12$ . На картах номер фазы взят тот, который приходится на сотую итерацию вычисления решения системы (4). Такого количества итераций оказалось достаточным для идентификации асимптотически устойчивого динамического режима, на который выходит решение после завершения переходного режима.

Пояснения к карте фазовой мультистабильности на рисунке 4 выстроим в порядке следования вдоль графика решения уравнения

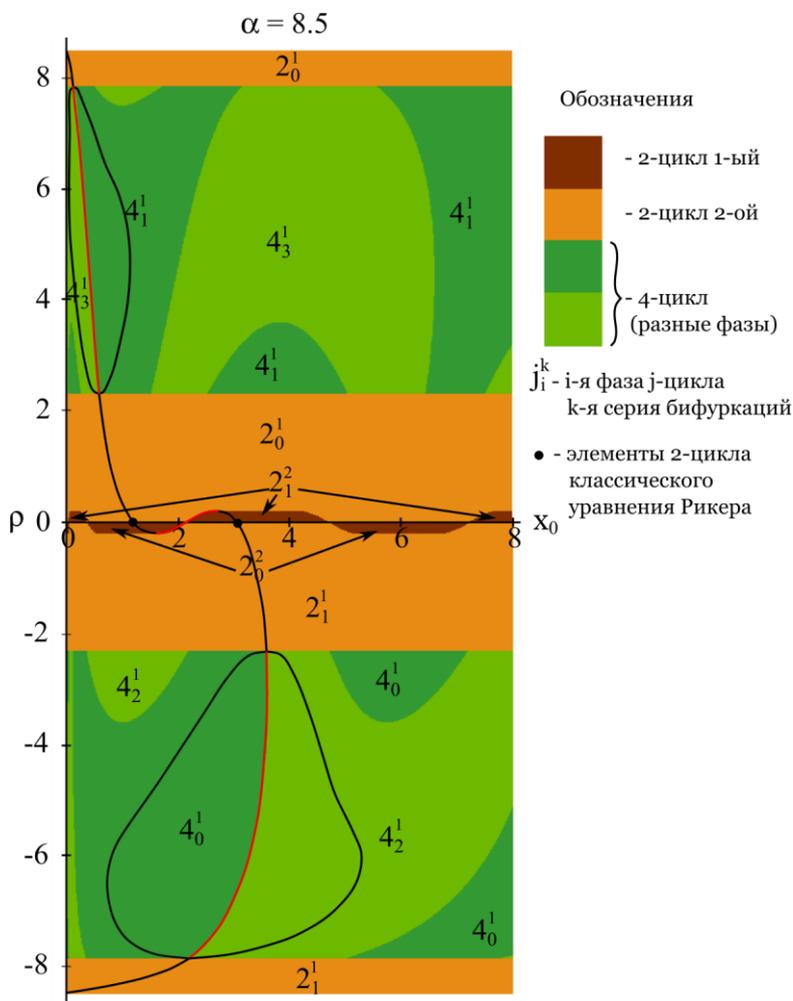
$$x = f^k(x) \quad (9)$$

при  $k = 8$ , где  $k$  – количество выполненных итераций исследуемого рекуррентного уравнения (9),  $x$  – элемент исследуемого цикла. График окрашен двумя цветами: красным и черным. Красным цветом выделены элементы устойчивых (по Ляпунову) периодических решений с длиной периодом не более  $k$ , а черным – неустойчивых. Этот график позволяет понять положение аттрактора (притягивающего множества) в рассматриваемом фазовом пространстве  $(x, \rho)$  относительно границ областей устойчивости фаз периодических решений, существующих у системы (4). Заметим, что чем ближе к границе области притяжения фазы проходит график  $x = f^k(x)$ , тем меньшее по своему значению внешнее воздействие может вызвать изменения динамики системы, такие как сдвиг фазы или смена режима в целом.

От точки перегиба  $(0, \ln(\alpha))$  до своих локальных экстремумов (минимума и максимума) график  $x = f^k(x)$  располагается на границах областей притяжений 2-циклов. На этом участке график окрашен в красный цвет, т.к. состоит из элементов неустойчивого 2-цикла. При  $\alpha = 8.5$  бассейн притяжений 2-цикла второй серии бифуркаций формируется из периодически расположенных вдоль оси  $Ox$  областей устойчивости  $(2_0^2$  и  $2_1^2)$  в полосе  $|\rho| < \rho_{\text{bif}} \approx 0.2$ . Отметим, что на рисунке 4 при отрицательных значениях  $\rho_0$  располагаются области фазы  $2_0^2$ , которые чередуются с фазой  $2_1^1$  2-цикла первой серии бифуркаций, а при положительных – области фазы  $2_1^2$ , чередующиеся с областями  $2_0^1$ . После прохождения локальных экстремумов график решений попадает в глубь названных областей устойчивости фаз 2-цикла из второй серии бифуркации удвоения периода и, пересекая их, доходит до оси  $Ox_0$ .

Точки пересечения графика решений уравнения (9) с осью соответствуют элементам 2-цикла первой серии бифуркаций удвоения периода классического уравнения Рикера с постоянным мальтузианским параметром  $\alpha$  (т.е. при  $\rho = 0$ ). Из рисунка 4 видно, что элементы 2-цикла первой серии бифуркаций удвоения периода

классического уравнения Рикера в пространстве  $(x, \rho)$  лежат на границе бассейнов притяжений. Следовательно, в окрестности этих точек даже малое по полуамплитуде  $\rho$  колебание параметра  $\alpha$  ведет к тому, что устойчивый 2-цикл классического уравнения Рикера смещается в бассейн притяжений одного из двух устойчивых 2-циклов системы (4). Какой именно устойчивый 2-цикл системы (4) притянет к себе исходный 2-цикл классического уравнения Рикера, определяется сочетанием фаз решения уравнения (3) и мальтузианского параметра в начальный момент колебаний мальтузианского параметра.



**Рис. 4.** Карта бассейнов фазовой мультистабильности системы (4) при  $\alpha = 8.5$  дополненная графическим решением уравнения (9). Черные линии обозначают элементы устойчивого по Ляпунову цикла, а красные – неустойчивого. Числа  $j_i^k$  –  $i$ -я фаза  $j$ -цикла  $k$ -ой серии бифуркаций удвоения периода ( $k = 1, 2$ ).

Устойчивые 2-циклы первой серии бифуркаций системы (4), располагающиеся вне области мультистабильности (при  $0.2 < |\rho| < 2.3$ ), демонстрируют невероятную устойчивость своих фаз ( $2_0^1$  и  $2_1^1$ ) на протяжении всего рассматриваемого диапазона значений переменной  $x$ . В данном случае можно говорить не только о глобальной асимптотической устойчивости решения, но и о глобальной асимптотической устойчивости фаз решения. Другими словами, не существует такого возмущения по переменной  $x$ , в результате которого произошел бы сдвиг фазы в решении. К фазовому сдвигу в глобально асимптотически устойчивом 2-цикле системы (4), согласно карте бассейнов фазовой мультистабильности, может привести только смена знака (с плюса на минус и, наоборот) у переменной  $\rho$ . Этот вывод следует из того, что при положительных значениях  $\rho$  наблюдается только одна фаза 2-цикла  $2_0^1$ , а при

отрицательных –  $2_1^1$ . Следовательно, сдвиг фазы мальтузианского параметра приводит к сдвигу фазы у глобально асимптотически устойчивого 2-цикла, поскольку решения системы (4) находятся в противофазе для отрицательных и положительных значений  $\rho$ .

С дальнейшим ростом абсолютного значения амплитуды  $\rho$  график решений (в обоих квадрантах) проходит через точки бифуркации удвоения периода 2-цикла ( $|\rho_{bif}| \approx 2.3$ ). В результате 2-цикл теряет устойчивость и рождается устойчивый 4-цикл. У графика в полосах  $2.3 < |\rho| < 7.9$  появляются по две новые ветви, состоящие из элементов 4-циклов, которые смыкаются при  $\rho \approx 7.9$ . При этом ветвь графика, состоящая из элементов неустойчивых 2-циклов (окрашены красным цветом), проходит по границе областей фаз возникшего 4-цикла.

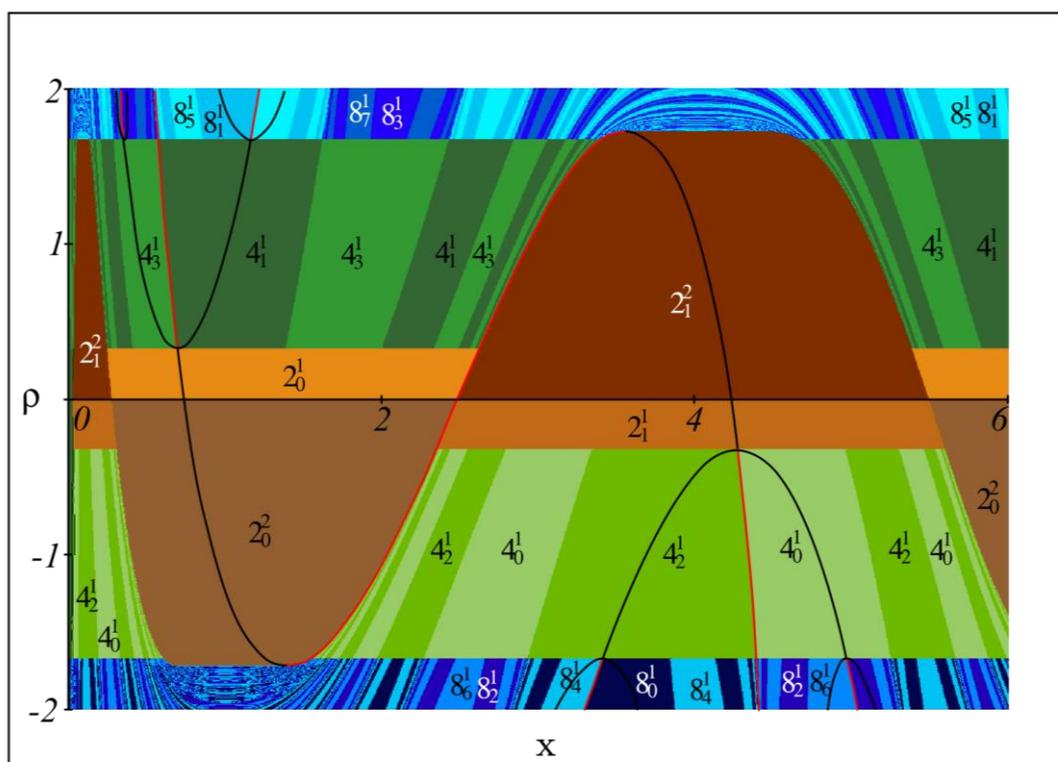
Следует отметить, что в пределах переменной  $\rho$  при  $2.3 < |\rho_0| < 7.9$  вариация начальных условий  $x_0$  может приводить к сдвигу на две фазы в решении ( $4_0^1 \leftrightarrow 4_2^1$  или  $4_1^1 \leftrightarrow 4_3^1$ ). Сдвиг на одну или на три фазы (например,  $4_0^1 \leftrightarrow 4_1^1$  или  $4_0^1 \leftrightarrow 4_3^1$ ) в динамике переменной  $x$  может вызвать только сдвиг по фазе периодического мальтузианского параметра уравнения (3). На карте (рис. 4) такой сдвиг фаз интерпретируется как изменение знака у полуамплитуды  $\rho$ . При абсолютном значении полуамплитуды  $|\rho| = 7.9$ , полосы существования 4-циклов сменяются на 2-цикл. Полосы устойчивости фаз 2-цикла в окрестности максимально возможного значения  $\rho = \alpha = 8.5$  граничат с бассейном притяжения тривиального решения.

В целом график решений темного цвета проходит через области устойчивости той или иной фазы. При этом видно, что в случае соседства режимов с разными фазами, возмущение по переменной  $x$  в пределах области устойчивости фазы, не вызывает у возмущенного решения сдвига по фазе. Однако у каждой фазы существует свое собственное пороговое значение возмущения переменной  $x$ , при превышении которого произойдет смена фазы. Например, из всех фаз 4-цикла, наиболее чувствительная к возмущению фаза  $4_3^1$  с самой узкой областью устойчивости. С другой стороны, если возмущение по переменной  $x$  превысило пороговое значение и вызвало сдвиг фазы у возмущенного решения, то этот сдвиг будет только на две фазы.

Далее рассмотрим фазовую мультистабильность системы (4) в пространстве  $(x, \rho)$  при  $\alpha = 12$  (рис. 5). Как видно, 2-циклы обеих серий бифуркаций, по сравнению с циклами большей длины, имеют самые устойчивые фазы, поскольку области их притяжений ( $2_0^1$  и  $2_1^1$ , и  $2_0^2$ , и  $2_1^2$ ) имеют самые широкие диапазоны значений по переменной  $x$ . При этом для 2-циклов первой серии бифуркаций с ростом колебаний полуамплитуды  $\rho$  (в диапазоне устойчивости этих 2-циклов) области устойчивости фаз  $2_0^1$  и  $2_1^1$  по переменной  $x$  расширяются. Это происходит вследствие сужения областей устойчивости фаз  $2_0^2$  и  $2_1^2$  двухлетнего цикла второй серии бифуркаций, что наблюдается на протяжении всей его области устойчивости по переменной  $\rho$ . Следует отметить, что вопрос устойчивости фаз 2-циклов первой серии бифуркаций созвучен вопросу устойчивости самого цикла. Выход из области устойчивости фазы, вследствие некоторого возмущения по переменной  $x$ , может привести к переходу системы (4) в другой режим – 2-цикл второй серии бифуркаций.

Как и ранее, у 2-циклов обеих серий бифуркаций при положительных значениях  $\rho$  наблюдается одна фаза цикла, а при отрицательных другая. Более того, численно установлено, что 2-цикл первой серии бифуркаций синфазен динамике мальтузианского параметра, а 2-цикл второй серии бифуркаций – противофазен. В данном случае под синфазностью (противофазностью) двух 2-циклов понимается соответствие фазы с наибольшим значением одного цикла к фазе с наибольшим (наименьшим) значением другого цикла. Следовательно, колебания численности могут быть, как синхронны, так и асинхронны колебаниям факторов и условий,

характеризующих среду обитания. Причем, чем больше репродуктивный потенциал популяции, тем меньше полуамплитуда колебаний условий, при которой наблюдается синфазность. Противофазность возникает при существенно больших амплитудах по сравнению с синфазностью. Таким образом, кратковременное воздействие внешних факторов, например миграции, эксплуатации или других явлений, ведущих к одновременному резкому изменению численности популяции, может вызвать в двухгодичных колебаниях сдвиг фазы, сопровождающийся изменением амплитуды. В модели такой сдвиг обусловлен выходом возмущенного решения из бассейна притяжения одного асимптотически устойчивого 2-цикла и попаданием в бассейн притяжения другого 2-цикла, находящегося в противофазе предыдущему.



**Рис. 5.** Карта бассейнов фазовой мультистабильности системы (4) в расширенном фазовом пространстве  $(x, \rho)$  при  $\alpha = 12$ , дополненная графическим решением уравнения  $x = f^k(x)$ . Черные линии обозначают элементы устойчивого по Ляпунову цикла, а красные – не устойчивого. Числа  $j^k_i$  –  $i$ -я фаза  $j$ -цикла  $k$ -ой серии бифуркаций удвоения периода ( $k = 1, 2$ ).

На основе визуального анализа ширины областей устойчивости фаз и расположения в них графика элементов устойчивых 2-циклов можно выделить следующие наиболее вероятные сценарии сдвига фазы двухгодичных колебаний в результате одномоментного возмущения по переменной  $x$ : 1) из фазы  $2_0^1$  в  $2_1^1$  в фазу максимального значения мальтузианского параметра  $(\alpha + \rho)$ ; и 2) из фазы  $2_0^2$  в  $2_1^1$  в фазу минимального значения мальтузианского параметра  $(\alpha - \rho)$ . Причем в обоих случаях переход происходит при отрицательном возмущении в фазе с меньшим значением переменной  $x$ . Для популяции это означает, что сдвиг фазы наиболее вероятен вследствие существенного уменьшения численности в фазу, когда популяция малочисленна. Другой причиной сдвига фазы двухгодичных колебаний численности популяции может быть сдвиг фазы колебаний мальтузианского параметра.

За 2-циклами в иерархии устойчивости фаз, согласно карте (рис. 5), следуют 4-циклы. Размах областей притяжения фаз 4-циклов по переменной  $x$  указывает на меньшую устойчивость самих фаз, по сравнению с устойчивостью фаз 2-циклов.

Отметим, что расположение областей устойчивости фаз 4-циклов первой серии бифуркаций имеет фрактальный характер. В окрестностях левых и правых (в представленной ориентации пространства  $(x, \rho)$  на рисунке 5) границ областей притяжения этих циклов наблюдается бесконечное чередование областей устойчивости их фаз, которые с приближением к границам аттрактора, становятся все уже и уже (рис. 6). Однако для последующего в этой серии бифуркаций 8-цикла, фрактальность наблюдается не только на границах бассейнов притяжения, но и в окрестности продолжения границ областей устойчивости фаз 4-циклов в области устойчивости 8-циклов (рис. 6,в).

Положение ветвей графика решения уравнения (9) в областях устойчивости фаз 8-цикла указывает на то, что в результате возмущения по переменной  $x$  наиболее вероятен сдвиг фазы в динамике на полупериод. Однако визуальный анализ позволяет заключить, что возможен сдвиг на две или шесть фаз, но для этого необходимо существенно большее по абсолютному значению возмущение по переменной  $x$ . Это связано с тем, что области устойчивости фаз 8-цикла в пространстве группируются парами.

Заметим, что при  $\rho > 1.75$  прекращает свое существование бассейн притяжения 2-цикла второй серии бифуркаций (области устойчивости фаз  $2_0^2$  и  $2_1^2$ ). Далее эту часть фазового пространства фрактально заполняют области устойчивости фаз 8-цикла первой серии бифуркаций, по форме напоминающие арки.

Следует отметить, что с ростом значений  $\alpha$  карты бассейнов фазовой мультистабильности, в силу возникновения новых режимов, усложняются, однако, результаты исследования случая при  $\alpha = 12$  можно экстраполировать на них, так как карты имеют схожую структуру.

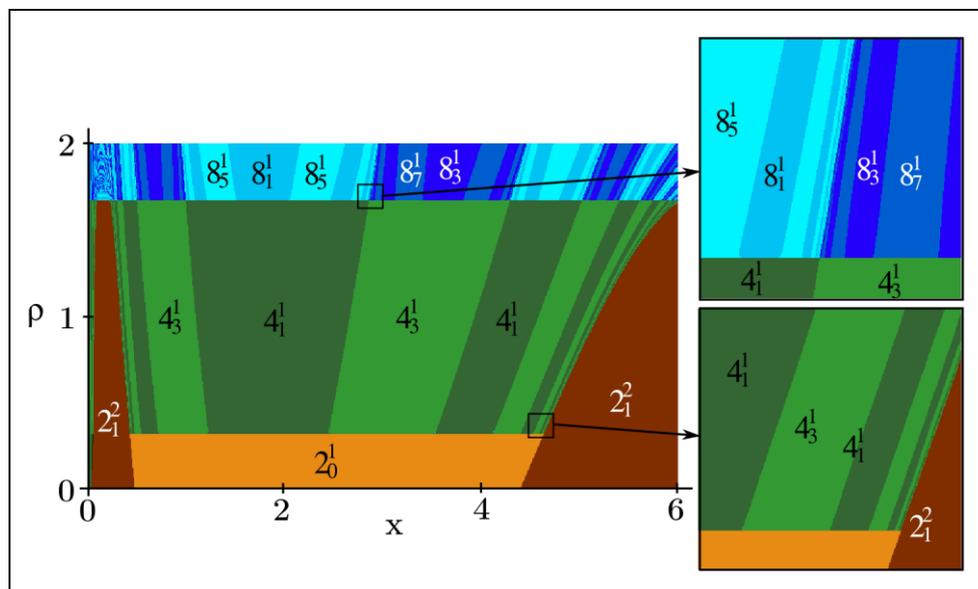


Рис. 6. Фрактальное распределение областей фазовой устойчивости циклов длины 4 и 8 системы (3) в фазовом пространстве  $(x, \rho)$  при  $\alpha = 12$ . Числа  $j_i^k$  –  $i$ -я фаза  $j$ -цикла  $k$ -ой серии бифуркаций удвоения периода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках проведенного исследования показано, что уравнение Рикера с мальтузианским параметром, циклически меняющимся с периодом два, имеет наряду с

мультистабильностью динамических режимов и фазовую мультистабильность. В результате либо возмущения переменной, либо сдвига фазы мальтузианского параметра, можно наблюдать, как сдвиг фазы в динамическом режиме, так и смену существующего режима на новый. Возможность перехода между разными динамическими режимами обусловлена мультистабильностью: модель имеет два разных устойчивых 2-цикла и две разные серии результатов их бифуркации по сценарию Фейгенбаума. Реализация каждого конкретного из сосуществующих режимов зависит от начального условия – начальных значений переменных. Следовательно, в области мультистабильности, при одних и тех же значениях параметров, в зависимости от начального условия может реализоваться как устойчивый режим – цикл конечной длины, так и другой устойчивый цикл или хаотический режим. Это указывает на возможность наблюдать в природе как регулярную, так и не регулярную динамику численности популяции при одних и тех же периодически изменяющихся условиях среды.

Возникший в результате транскритической бифуркации первый устойчивый 2-цикл синхронен колебаниям мальтузианского параметра, а возникший в результате касательной бифуркации второй устойчивый 2-цикл – асинхронен. Это свидетельствует о том, что 2-циклы колебаний численности, в периодически изменяющейся среде могут быть, как синхронны, так и асинхронны колебаниям среды обитания. Причем, чем больше репродуктивный потенциал популяции, тем меньше может быть амплитуда изменений условий среды обитания, при которой будет наблюдаться 2-цикл с асинхронностью, а синхронность может быть и при существенно больших амплитудах.

Сравнение ширины областей устойчивости фаз циклов позволяет заключить, что 1) 2-циклы имеют более устойчивые фазы, чем циклы большей длины; 2) из фаз 2-циклов наибольшую вероятность потери устойчивости имеют фазы, соответствующие малой численности.

Для устойчивого 4-цикла первой серии бифуркаций сдвиг фазы мальтузианского параметра вызывает сдвиг на одну или даже на три фазы. Сдвиг на две фазы этого 4-цикла возможен при изменении полуамплитуды колебания мальтузианского параметра или при возмущении по переменной  $x$ .

Отметим, что любая вариация возмущения переменной  $x$  в пределах области устойчивости фазы, не вызывает, не только переход в новый режим в условиях мультистабильности, но и даже сдвига фазы в решении. При этом у каждой фазы существует свое пороговое значение возмущения, при превышении которого происходят указанные изменения в режиме. При этом, чем больше длина цикла, тем больше он имеет фаз со своими областями притяжения и тем меньше пороговые значения, при превышении которых происходит перескок из одного бассейна в другой.

Столь узкая ширина областей устойчивости фаз циклов большой длины, например 8-циклов, позволяет предположить, что запас устойчивости таких циклов существенно ниже, чем у циклов длины 2 и 4. Возмущения, которые устойчивость циклов малой длины «поглощала» бы, способны вызвать у 8-циклов различные фазовые переходы, которые существенно усложняют динамику модельной траектории и затрудняют идентификацию наблюдаемого динамического режима.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (18-04-00073) и программы «Дальний Восток» 2018–2020 (18-5-051).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анищенко В.С., Николаев В.В., Шабунин А.В., Астахов В.В. Исследование хаотической синхронизации в системе симметрично связанных генераторов. *Радиотехника и электроника*. 2000. Т. 45. № 2. С. 196–203.

2. Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. Виды колебаний, мультистабильность и бассейны притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода. *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2002. Т. 10. № 4. С. 47–67.
3. Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П. Статистические свойства оценки коэффициента фазовой синхронизации. *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2008. Т. 16. № 2. С. 111–121.
4. Коблянский С.А., Шабунин А.В., Астахов В.В. Вынужденная синхронизация периодических колебаний в системе с фазовой мультистабильностью. *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6. № 2. С. 277–289.
5. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. *Бифуркации отображений*. Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2012. 196 с.
6. Короновский А.А., Трубецков Д.И. *Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки*. Саратов: Изд.-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. 324 с.
7. Базыкин А.Д. *Нелинейная динамика взаимодействующих популяций*. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
8. Wilmschurst J.F., Greer R., Henry J.D. Correlated cycles of snowshoe hares and Dall's sheep lambs. *Can. J. Zool.* 2006. V. 84. P. 736–743.
9. Elmhagen B., Hellström P., Angerbjörn A., Kindberg J. Changes in vole and lemming fluctuations in northern Sweden 1960–2008 revealed by fox dynamics. *Annales Zoologici Fennici*. 2011. V. 48. № 3. P. 167–179.
10. Кулаков М.П., Неверова Г.П., Фрисман Е.Я. Мультистабильность в моделях динамики миграционно-связанных популяций с возрастной структурой. *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10. № 4. С. 407–425.
11. Курилова Е.В., Кулаков М.П., Фрисман Е.Я. Последствия синхронизации колебаний численностей в двух взаимодействующих сообществах типа «хищник-жертва» при насыщении хищника и лимитировании численности жертвы. *Информатика и системы управления*. 2015. № 3. С. 24–34.
12. Krebs C.J., Kielland K., Bryant J., O'Donoghue M., Doyle F., McIntyre C., DiFolco D., Berg N., Carriere S., Boonstra R. et al. Synchrony in the showshoe hare (*Lepus americanus*) cycle in northwestern North America, 1970–2012. *Can. J. Zool.* 2013. V. 91. № 8. P. 562–572. doi: [10.1139/cjz-2013-0012](https://doi.org/10.1139/cjz-2013-0012)
13. Petrovskaya N., Petrovskii S. Catching ghosts with a coarse net: use and abuse of spatial sampling data in detecting synchronization. *Journal of the Royal Society Interface*. 2017. V. 14. № 127. P. 20160855.
14. Henson S.M., Cushing J.M., Costantino R.F., Dennis B., Desharnais R.A. Phase switching in population cycles. *Proc. R. Soc. Lond. B*. 1998. V. 265. P. 2229–2234.
15. Чернявский Ф.Б., Лазуткин А.Н. *Циклы леммингов и полевков на Севере*. Магадан: ИБПС ДВО РАН, 2004. 150 с.
16. Жигальский О.А. Структура популяционных циклов рыжей полевки (*Myodes glareolus*) в центре и на периферии ареала. *Изв. РАН. Сер. биол.* 2011. № 6. С. 733–746.
17. Kausrud K.L., Mysterud A., Steen H., Vik J.O., Østbye E., Cazelles B., Framstad E., Eikeset A.M., Mysterud I., Solhøy T., Stenseth N. Chr. Linking climate change to lemming cycles. *Nature*. 2008. V. 456. P. 93–97.
18. Henttonen H., Wallgren H. Small rodent dynamics and communities in the birch forest zone of northern Fennoscandia. In: *Nordic mountain birch ecosystems*. Ch. 22. Ed. Wielgolaski F.E. New York and London: UNESCO, Paris and Parthenon Publishing Group, 2001. P. 262–278.

19. Фрисман Е.Я., Неверова Г.П., Кулаков М.П., Жигальский О.А. Смена динамических режимов в популяциях видов с коротким жизненным циклом: результаты аналитического и численного исследования. *Математическая биология и биоинформатика*. 2014. Т. 9. № 2. С. 414–429. doi: [10.17537/2014.9.414](https://doi.org/10.17537/2014.9.414)
20. Ревуцкая О.Л., Кулаков М.П., Неверова Г.П., Фрисман Е.Я. Влияние соотношения полов на динамику численности двухвозрастной популяции. *Математическая биология и биоинформатика*. 2017. Т. 12. № 2. С. 237–255. doi: [10.17537/2017.12.237](https://doi.org/10.17537/2017.12.237)
21. Каев А.М. Временная структура миграционного потока горбуши *Oncorhynchus gorbuscha* в Охотское море. *Известия ТИНРО*. 2002. № 1–3. С. 904–920.
22. Шлюфман К.В., Неверова Г.П., Фрисман Е.Я. Два цикла уравнения Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром: устойчивость и мультистабильность. *Нелинейная динамика*. 2016. Т. 12. № 4. С. 553–565.
23. Шлюфман К.В., Неверова Г.П., Фрисман Е.Я. Динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром. *Нелинейная динамика*. 2017. Т. 13. № 3. С. 363–380.
24. Ревуцкая О.Л. Влияние климатических факторов (температуры и осадков) на динамику численности копытных (на примере Еврейской автономной области). *Региональные проблемы*. 2012. Т. 15. № 2. С. 5–11.
25. Nedorezov L.V., Sadykova D.L. Dynamics of larch bud moth populations: application of Moran-Ricker models with time lag. *Ecological Modelling*. 2015. V. 297. P. 26–32.
26. Neverova G.P., Yarovenko I.P., Frisman E.Y. Dynamics of populations with delayed density dependent birth rate regulation. *Ecological Modelling*. 2016. V. 340. P. 64–73.
27. Ашихмина Е.В., Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Куликов А.М. Математическая модель динамики величины заготовок на примере локальной популяции маньчжурской белки. *Журнал общей биологии*. 1982. Т. 43. № 5. С. 246–257.
28. Ревуцкая О.Л. Анализ влияния запасов корма на динамику численности популяции белки (на примере Еврейской автономной области). *Региональные проблемы*. 2010. Т. 13. № 2. С. 37–44.
29. Zhou Z., Zou X. Stable periodic solutions in a discrete logistic equation. *Appl. Math. Lett.* 2003. V. 16. P. 165–171.
30. Elaydi S., Sacker R. Basin of attraction of periodic orbits of maps on the real line. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2004. V. 10. P. 881–888. doi: [10.1080/10236190410001731443](https://doi.org/10.1080/10236190410001731443)
31. Ашихмина Е.В., Израильский Ю.Г., Фрисман Е.Я. Динамическое поведение модели Рикера при циклическом изменении одного из параметров. *Вестник ДВО РАН*. 2004. № 5. С. 19–28.
32. Kon R. Attenuant cycles of population models with periodic carrying capacity. *J. Difference Eq. Appl.* 2005. V. 11. №4–5. P. 423–430.
33. AlSharawi Z., Angelos J., Elaydi S., Rakesh L. An extension of Sharkovsky's theorem to periodic difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2006. V. 316. P. 128–141. doi: [10.1016/j.jmaa.2005.04.059](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.059)
34. AlSharawi Z., Angelos J., Elaydi S. Existence and stability of periodic orbits of periodic difference equations with delays. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008. V. 18. № 1. P. 203–217.
35. Sacker R.J. A note on periodic Ricker maps. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2007. V. 13. № 1. P. 89–92.
36. Elaydi S.N., Luis R., Oliveira H. Towards a theory of periodic difference equations and its application to population dynamics. In: *Dynamics, Games and Science I*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. P. 287–321. doi: [10.1007/978-3-642-11456-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-11456-4).

37. Sacker R.J., Hubertus F. A conjecture on the stability of the periodic solutions of Ricker's equation with periodic parameters. *Applied Mathematics and Computation*. 2010. V. 217. № 3. P. 1213–1219.
38. Рикер У.Е. *Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб*. М.: Пищевая промышленность, 1979. 408 с.
39. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. *Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости*. М.: МЦНМО, 2005. 416 с.
40. Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. *Дискретные модели динамики численности популяции и оптимизации промысла*. М.: Наука, 1979. 168 с.

Рукопись поступила в редакцию 12.03.2018.

Дата опубликования 24.04.2018.