

Особенности прогностического моделирования многоволновой динамики опасных вирусных заболеваний

Бибик Ю.В.*

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской
академии наук, Москва, Россия*

Аннотация. Для повышения точности прогнозирования новых опасных вирусных заболеваний предложен проверенный на фактических данных аналитический метод, основанный на применении явного аналитического решения исходной модели SIR. Гамильтоновость модели и включение в решение поправок любого порядка обеспечивает возможность комплексного разностороннего анализа и своевременной оценки факторов и рисков развития пандемической ситуации. Наличие точного решения позволяет значительно упростить технологию настройки модели. Для большей прозрачности результатов метода на конкретных примерах рассмотрены различные сценарии прогнозирования. Выявлены возможные ошибки, предложены методы их устранения. Подготовлен сценарий точного прогнозирования (горизонт прогнозирования 5 недель). Все аналитические результаты проверены численно и визуально на официальных статистических данных о кумулятивном количестве заболевших COVID-19 в г. Москве за период с 8.08.2023 по 14.01.2025. Даны рекомендации по повышению точности прогнозирования с использованием предложенного метода в реальных условиях. Метод позволяет снизить риски неточных прогнозов, затраты машинного времени, повысить точность прогнозирования, уровень объяснимости результатов, их интегрируемости в программы междисциплинарных исследований.

Ключевые слова: компартментальные модели, многоволновая динамика, гамильтониан, теория возмущений, аппроксимация, прогнозирование

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование направлено на повышение точности прогнозов многоволновой динамики опасных вирусных заболеваний и базируется на ценном опыте, полученном исследователями в период завершившейся пандемии COVID-19.

В работе приведен краткий анализ результатов исследований, в которых изучались причины возникновения множества пандемических волн и точность прогнозирования их распространения, включая определение сроков и масштабов пиков волн.

Как показали результаты анализа, у исследователей пока не сформировалось единого мнения относительно эффективности прогностического моделирования COVID-19 и даны противоречивые (от бесполезных до лучших) оценки прогностических возможностей компартментальных моделей, наиболее широко применявшихся в большинстве опубликованных работ по прогнозированию многоволновой динамики пандемии.

В связи с неоднозначными оценками результатов исследований, для повышения готовности к будущим вспышкам, в работе дополнительно изучены особенности и

* ybibik@frccsc.ru

возможности повышения точности прогнозирования с использованием фактических данных многоволновой динамики COVID-19 в г. Москве. Для дополнительного исследования целесообразности применения при прогнозировании в качестве исходной выбрана классическая компартментальная модель SIR.

Используемый в работе метод, направленный на повышение точности прогнозирования, включает следующие этапы:

- получение явного аналитического решения модели SIR для описания одноволнового процесса распространения инфекции;
- использование композиции одноволновых решений для проверки надежности и точности аппроксимационных возможностей метода путем аппроксимации реального многоволнового пандемического процесса;
- проверку прогностических возможностей метода на различных сценариях прогнозирования, выбор и обоснование лучшего варианта.

С помощью предложенного аналитического метода в работе определены точные и ошибочные варианты прогнозирования, выявлены возможные ошибки, предложены варианты их устранения. Подготовлены рекомендации по использованию метода в режиме реального времени.

Все аналитические результаты проверены численно и визуально (с использованием программного обеспечения MATLAB) на официальных статистических данных по кумулятивному количеству заболевших COVID-19 в г. Москве за период с 8.08.2023 по 14.01.2025.

Основные направления и особенности применения компартментальных моделей в период пандемии COVID-19 подробно описаны в работе [1]. Достоинства, ограничения, недостатки классической модели SIR (выбранной в данной статье в качестве исходной), выявленные при прогнозировании динамики COVID-19, приведены в работе [2].

В перечень литературы настоящей статьи включены работы [3], [4] по исследованию основных причин возникновения волн гриппа пандемии 1918–1919 гг., работы по волновой динамике COVID-19 [5–18], включая работу с результатами моделирования будущей динамики COVID-19 (на 10 лет вперед, с учетом сезонности и ослабленного иммунитета) [17], и работу [18], с кратким анализом причин недостаточной готовности стран к COVID-19 и предложением плана действий и мер, которые обезопасят людей и общество в случае новой пандемии, а также работы по оценке точности прогнозирования [19–23], эффективности применявшихся в период пандемии ИИ-технологий [24], по изменению ключевых параметров схожих с COVID-19 вирусных заболеваний [25].

2. КРАТКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ COVID -19, НАПРАВЛЕННЫХ НА ВЫЯВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ФАКТОРОВ- ИСТОЧНИКОВ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПАНДЕМИЧЕСКИХ ВОЛН

Главной задачей, решаемой в период вспышек опасных вирусных заболеваний, является предотвращение или максимальное сокращение одноволновой или многоволновой передачи инфекции наиболее эффективным способом. Одним из инструментов, используемых для ее решения, являются результаты прогнозирования ожидаемого масштаба распространения заболевания. Учитывая сложность реализации защитных мероприятий, их высокую стоимость, важность повышения точности, своевременности и надежности прогнозов очевидна.

В условиях продолжающихся исследований, когда часть необходимой информации отсутствует, и сохраняется неопределенность с механизмом возникновения множества пандемических волн, особую ценность представляют исследования, выполненные с использованием фактических данных динамики COVID-19.

Благодаря этим исследованиям, выполненным с использованием разных моделей, методов и подходов, математическая картина причин возникновения волн постепенно

проясняется. Результаты их систематизации, изучения и отбор лучших из них, являются основным фундаментом для подготовки новых стратегий и улучшения эффективности прогнозирования новых вспышек.

На современном уровне знаний об опасных вирусах как завершившуюся, так и будущие вспышки, невозможно описать одной универсальной моделью.

Поскольку COVID-19 заболевание новое, сложность решения задачи описания его динамики усложняется наличием больших объемов разрозненной информации, различных неопределенностей, а также в наличии сложных причинно-следственных связей между факторами – возможными причинами возникновения и распространения множества волн.

Во многих опубликованных работах рассмотрены многочисленные факторы влияния на процесс, отмечены те, которые (по мнению авторов) являются доминирующими, выяснялось каков размер вклада каждого из них. Исследовалась возможность выявления какого-либо одного (или комбинации) факторов, которые в условиях реального времени служили бы надежными индикаторами-предвестниками возникновения новых волн.

Особенно сложной остается проблема точности долгосрочного прогнозирования, поскольку по ходу нового заболевания его картина непредсказуемо и резко меняется, вызывая неожиданные изменения многоволновой динамики. В реальных условиях пандемии это усложняет работу исследователей, поскольку требуется постоянный контроль и доработка моделей для учета новых и измененных параметров.

В ряде работ [21–22] авторы пришли к выводу о бессмысленности долгосрочного прогнозирования динамики пандемии из-за экспоненциального характера распространения инфекции и неожиданных стохастических потрясений.

Представляют интерес результаты исследований схожей с COVID-19 по картине заболевания и масштабу глобального распространения пандемии гриппа 1918–1919 гг., которая также распространялась волнами.

В работе [3] исследована динамика осенних волн гриппа 1918 года в городах США. Оценивалась влияние на возникновение волн защитных мер, введенных в городах для замедления скорости передачи инфекции. Меры включали закрытие школ, церквей, запрет массовых собраний, обязательное ношение масок, изоляцию больных и усиление мер дезинфекции/гигиены. Отмечены поразительные корреляции между сроками введения защитных мер и превышением смертности (общей или пиковой) в исследованных городах. Последствия резко отличались из-за того, что меры были введены слишком поздно и слишком рано сняты. Ограниченные по времени меры снижали общую смертность лишь умеренно, на 10–30 %. В городах, где вмешательства были введены более эффективно, общая смертность была снижена до 30–50 %. Авторами сделано предположение, что существует оптимальная «золотая середина», приводящая к достижению единого пика минимального размера, но не один город США не нашел эту оптимальную точку. Однако города, которые приблизились к этой теоретической точке, смогли максимально снизить смертность. Второй причиной, влияющей на возникновение волн и показатели смертности, названо реактивное изменение поведения людей на опасность смерти. Здесь же отмечено, что многие другие факторы, такие как размер или плотность населения, не имели существенной корреляции с волнами и избыточной смертностью.

В работе [4] изучалось, как изменяющиеся биологические свойства вируса повлияли на возникновение трех волн гриппа 1918 года в Лондоне, Англия. Авторами выяснялось, могут ли изменения эффективной скорости передачи, восстановления скорости или изменения скорости потери иммунитета (или комбинации этих факторов) повлиять на возникновение волн и показатели смертности. В работе отмечено, что каждой волне пандемии предшествовал быстрый рост скорости передачи, и быстрое падение перед гребнем волны. Падение передачи позволяло эпидемии достичь пика до

того, как количество восприимчивых индивидуумов становилось слишком маленьким и таким образом запускались последующие волны заражения. Отмечено, что основное влияние на возникновение волн и смертность оказывали именно временные изменения скорости передачи заболевания. Также отмечено возможное косвенное влияние на формирование волн климатических факторов и изменения в поведении людей.

При изучении многоволновой динамики COVID-19 исследователями также рассмотрены различные факторы, которые могут привести к формированию волн.

В работе [5] (кроме предложений по улучшению самой технологии прогнозирования) исследованы типы, драйверы и модуляторы волн, дано пояснение различных трактовок термина «эпидемическая волна», предложен алгоритм (с открытым доступом) для разделения эпидемического временного ряда (подтвержденных случаев и смертей) на неперекрывающиеся «наблюдаемые волны». Временные ряды использованы для изучения влияния модуляторов волн (эффектов сезонности, сдвигов в поведении населения). Проведен глобальный сравнительный анализ влияния защитных мер и тестирования на размер наблюдаемых волн, подтверждена особая важность раннего внедрения защитных мер, имеющих связь с показателями смертности. В отношении этой связи авторами отмечено следующее: *«Скорее всего, наши результаты показывают, что страны, которые ввели более строгие и/или длительные меры, сделали это в ответ на более высокие показатели смертности, а не то, что более строгие меры стали причиной большего количества смертей»*.

В работе [6] представлен детальный анализ неоднозначных особенностей четырех фаз динамики распространения COVID-19 в каждой из 29 провинций Китая в период с 19 января по 10 марта 2020 года. Сценарий развития пандемии в Китае применен авторами для моделирования прогноза развития COVID-19 в странах Западной Европы. Отмечена высокая эффективность принятых в Китае строгих мер сдерживания (начиная с марта 2020 года количество новых ежедневных подтвержденных случаев находилось в однозначном диапазоне). Отмечено также, что реальное число случаев заболевания вероятно во много раз выше, чем указано в подтвержденных данных, поэтому прогностическая кривая не совпадала с подтвержденными данными. Плотность, многомобильность, неоднородная демография, реакция правительства, состояние здоровья, напрямую связаны с изменениями в динамике распространения инфекции. Но не нашли объяснения повышенные показатели зараженности и смертности в одной из северных (наиболее удаленных от очага заболевания) провинций Китая (с не самой высокой плотностью населения и с более низкой мобильностью, чем в других провинциях).

В работе [7] выполнен анализ развития волнового эпидемического процесса в Российской Федерации в период 2020–2022 гг. Графически и в цифрах представлена динамика развития каждой из пяти волн в г. Москве и в регионах Российской Федерации, включая данные (в неделях) по времени роста, достижения пика и спада по каждой волне. Выделены уязвимые группы населения – люди в возрасте 50–64 года и старше 65 лет. Отмечены темпы снижения тяжести заболевания от волны к волне (первая волна – тяжелых случаев 4.5 %, вторая – 3.1 %, третья – 2.6 %, четвертая – 2.2 %, пятая – 0.4 %). Обозначены три площадки начала пандемии (Москва, Мособласть, Санкт-Петербург). Основными факторами, способствующими многоволновому распространению инфекции на этих площадках названы высокая плотность, активность, мобильность населения, а также малое социальное дистанцирование.

В работе [8] исследована многоволновая динамика COVID-19 в Республике Беларусь (развивалась без введения карантина), ключевым фактором распространения трех волн вируса отмечена плотность населения. При этом в крупных городах с

высокой плотностью населения распространение вируса происходило наиболее интенсивно.

Эта точка зрения поддержана в большинстве опубликованных работ. Например, в [9] высокая плотность населения также названа катализатором распространения инфекции. Однако отдельные результаты (последние абзацы в работах [3] и [6] говорят о том, что связь между возникновением волн и плотностью населения не всегда устойчива.

В большинстве работ, исследующих многоволновую динамику COVID-19, в качестве одной из основных причин возникновения многочисленных волн пандемии отмечена высокая мобильность населения. Однако в работе [10], при построении модели для повышения точности прогнозирования многоволновой динамики в Токио, авторами сделан вывод, что связь между возникновением волн и показателями мобильности нельзя считать устойчивой (особенно для долгосрочного прогнозирования). В подтверждение (со ссылками на источники) приведены следующие данные:

– США: мобильность людей колебалась около 95 % от нормального периода с 1 июля по 1 декабря 2020 года, но именно в это время здесь наблюдалась вторая волна в июле и третья волна в ноябре;

– Токио: индекс социальных контактов был на нормальном уровне (и даже снизился после июля 2020 года), однако в этот период Токио пережил вторую волну пандемии.

В приведенных выше работах авторами рассмотрена только небольшая часть факторов, оказывающих влияние на формирование волн COVID-19. Анализ неоднозначных выводов приведенных выше работ показывает, что вопросы возникновения и распространения пандемических волн требуют дополнительного изучения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ ФАКТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МНОГОВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ COVID-19

Завершившаяся пандемия COVID-19 стала испытательным полигоном проверки на практике эффективности прогнозов многоволновой динамики распространения нового заболевания, вызванного неизученным вирусом. Прогнозирование выполнялось с использованием различных моделей, методов и подходов. В этот период были разработаны и испытаны новые и усовершенствованы уже известные модели. Накоплен уникальный опыт прогностического моделирования в условиях чрезвычайной ситуации.

Оценка и изучение полученных в период пандемии ошибок и достижений продолжается. По мере накопления данных, эволюционирования и совершенствования используемых методов предсказательная сила моделей возрастает. Полученный опыт служит основой для повышения надежности и точности прогнозирования динамики новых опасных вирусных заболеваний за счет более глубокого понимания их природы и основных закономерностей распространения.

В работах [11, 12] авторами подтверждена высокая точность результатов прогнозирования многоволновой динамики COVID-19, полученная с использованием компартментальных моделей.

При этом в работе [11] для прогнозирования использовался многоисточниковый метод динамического ансамблевого прогнозирования (multi-source dynamic ensemble prediction – (MDEP)) с базовой моделью SEIR. Метод MDEP был успешно применен авторами для прогнозирования количества кумулятивных случаев вспышки COVID-19 в трех городах Китая.

Средние показатели точности прогнозирования методом MDEP в городах Пекине, Ланьчжоу и Бэйхае составили 89.15; 91.74 и 94.97 % соответственно.

Для проверки точности долгосрочных прогнозов в работе [12] использовалась компартментальная модель SEIRb. Авторы отмечают, что модель «предлагает информативные прогнозы на срок до 20 недель вперед с точностью, сравнимой с лучшими моделями в наборе CDC».

В работе [13] для оценки и проверки прогнозов применено перспективное и многообещающее направление прогностического моделирования, использующее комплексную модельную структуру, базирующуюся на интеграции компартментальной модели и машинного обучения. Интеграция позволила использовать их лучшие возможности и компенсировать недостатки друг друга.

Комартментальная модель позволяет с использованием входных данных и различных вариантов модели (с компартментами для инфицированных, выздоровевших, умерших, повторно заразившихся) исследовать эволюцию динамики разных вариантов инфекции и получать не только воспроизводимые, но и поддающиеся объяснению и пониманию результаты, которые трудно объяснить при их генерировании только моделями машинного обучения.

Второй прогностический компонент с открытым кодом Prophet (разработан Facebook для прогнозирования временных рядов, включая прогнозирование COVID-19), позволяет строить точные и интерпретируемые прогнозы в условиях ограниченного объема данных, сезонных колебаний и нестабильных трендов. Он сочетает в себе сильные стороны методов статистического моделирования и машинного обучения.

Используя только данные за предыдущий месяц, Prophet значительно снижает потребность в обучающих данных, повышая вычислительную эффективность и обеспечивая эффективную работу с ограниченными данными.

Комплексная двухкомпонентная модель предназначена для непрерывного мониторинга и прогнозирования и позволяет в автоматическом режиме обрабатывать входные данные, устраняя необходимость постоянной ручной донастройки модели в связи с изменением входных данных.

По сообщению авторов, модель обеспечивает высокую точность прогнозирования, даже если в процессе распространения происходят резкие изменения, включая появление новых вариантов вируса. Модель испытана на фактических открытых и общедоступных данных по количеству зараженных, выздоровевших, умерших, госпитализированных, данных по контрмерам, мобильности, вариантам вируса и другим данным для Италии, ряда европейских стран и некоторых штатов США за общий период с 2020 по 2023 год.

Средней можно назвать оценку, данную авторами в работах [14, 15] фактической точности прогнозирования динамики COVID-19 лучшими прогностическими моделями США за прошедший период.

Основной причиной такой оценки авторы называют низкое качество данных, получаемых из неоднородной системы отчетности, временные задержки, занижение данных, отсутствие единообразия, стандартизации данных, что и приводит к непредсказуемым ошибкам, требуя постоянной корректировки моделей, которые генерируют требующие повышения точности прогнозы.

Итоги подводились с использованием предложенной авторами методики. По ней оценивалась эффективность 51 модели прогнозирования четырех волн COVID-19 в США. Точность прогнозирования проверялась для разных типов моделей, отобранных из US CDC (US Centers for Disease Control and Prevention /Центром по контролю и профилактике заболеваний США), включая компартментальные, ансамблевые, гибридные и прочие модели, а также модели с использованием машинного обучения. Проверяемый горизонт прогнозирования составил четыре недели.

По оценке авторов более двух третей моделей не смогли превзойти простую статическую базовую линию случаев, а одна треть не смогла превзойти простой линейный трендовый прогноз.

Как отмечено в работе, средняя абсолютная процентная ошибка прогнозирования (MAPE) при сравнении по волнам лучших компартментальных моделей и лучших моделей машинного обучения оставила для первой волны 31 и 32 %; для второй 45 и 44 %; для третьей 63 и 63 %; для четвертой 92 и 44 % соответственно.

Сравнение всех других типов моделей по волнам также показало, что ни один из подходов к моделированию не превзошел другие, включая ансамблевые модели. Это же исследование показало, что при использовании ансамблевых моделей, они добавляли индивидуальные ошибки модели и, таким образом, не показали существенной разницы в эффективности прогнозирования. У всех моделей ошибки моделирования нарастали с увеличением времени. Через неделю с момента прогнозирования, ошибки прогнозирования большинства моделей составляли чуть ниже 25 %, но увеличивались примерно до 50 % при четырехнедельном прогнозировании. Как отмечено в работе, для повышения точности прогнозирования необходимы надежные источники данных об истинных числах случаев, вариантах и иммунитете.

Совсем низкая оценка итогов прогнозирования прошедшей пандемии дана в работе [16]. Авторами высказано мнение о бесполезности прогнозов компартментальных моделей при их использовании в США в период пандемии COVID-19.

Как видно из приведенных оценок результатов прогнозирования многоволновой пандемической динамики вопросы повышения точности прогнозирования требуют дополнительного изучения.

Цель настоящей работы: для большей готовности к новым вспышкам, с учетом результатов точности прогнозирования COVID-19, дополнительно исследовать особенности и возможность повышения точности прогнозирования многоволновой динамики опасных вирусных заболеваний с применением независимого метода, основанного на использовании полученного в статье явного аналитического решения модели SIR. Для большей прозрачности результатов на конкретных примерах рассмотреть различные варианты прогнозирования, выявить причины возможных ошибок, дать предложения по их устранению. Подготовить вариант точного прогнозирования и рекомендации по использованию метода прогнозирования в режиме реального времени. Подтвердить все аналитические результаты путем численной и визуальной проверки на официальных статистических данных по кумулятивному количеству заболевших COVID-19 в г. Москве за период с 8.08.2023 по 14.01.2025.

Оригинальность, новизна и практическая значимость работы: разработан пригодный для применения в реальных условиях независимый метод исследования многоволновой динамики опасных вирусных заболеваний с использованием явного аналитического решения модели SIR. Метод пригоден для оценки текущего состояния и прогнозирования с высокой точностью ожидаемого масштаба распространения опасных вирусных заболеваний, значительно сокращает затраты машинного времени, упрощает процесс настройки системы благодаря наличию явного аналитического решения исходной модели.

4. ОПИСАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ

Получение аналитического решения модели SIR

В качестве исходной модели для исследования особенностей прогнозирования опасных вирусных заболеваний будем использовать классическую модель SIR. Ее достоинство (перекрывающие все ее недостатки) состоит в том, что ее математическая структура позволяет адекватно улавливать основные особенности динамики

распространения вируса. Кроме того, она является гамильтоновой моделью, что значительно упрощает ее исследование. Она делит популяцию на три компартмента (отсека) – восприимчивых, инфицированных и выздоровевших.

Переменная S (Susceptible/восприимчивые) описывает число восприимчивых к инфекции индивидуумов, они здоровые, не заразные, но могут заразиться, так как не имеют иммунитета. Переменная I (Infected/инфицированные) обозначает число болеющих и заразных. Переменная R (Recovered/выздоровевшие) описывает число выздоровевших, они не заразные и не могут заразиться, так как имеют иммунитет. Модель SIR имеет следующий вид:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (3)$$

В формулы (1)–(3) входят два параметра. Параметр β определяет скорость распространения эпидемии, параметр γ описывает скорость выздоровления. Для уменьшения числа входящих в систему параметров произведем следующие замены:

$$t \rightarrow \beta t, \\ \gamma \rightarrow \gamma / \beta.$$

Перейдем к первому этапу получения аналитического решения модели SIR. Для этого выполним следующие шаги: на первом этапе найдем канонические переменные и построим гамильтониан системы; на втором этапе (с использованием гамильтониана) получим неявное аналитическое решение модели SIR.

Система SIR устроена таким образом, что первые два из трех уравнений образуют отдельную систему, не зависящую от третьего уравнения. Эта система является гамильтоновой. В этом можно убедиться, введя канонические переменные $P = \ln S$ и $Q = \ln I$. В этих переменных первые два уравнения примут гамильтонов вид

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -e^Q, \quad (4)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} = e^P - \gamma, \quad (5)$$

при этом гамильтониан равен

$$H = e^P + e^Q - \gamma P. \quad (6)$$

С помощью гамильтониана (6) уравнения (4), (5) могут быть приведены к одному уравнению

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = e^P - \gamma P - H. \quad (7)$$

Таким образом, гамильтоновость системы SIR позволяет свести ее к одному уравнению. Остается определить конкретное значение гамильтониана (6). Поскольку гамильтониан инвариантен, достаточно вычислить его в начальный момент времени. Используем для этого начальные условия для переменных S и R

$$S(0) = e^{-R(0)/\gamma} = e^{-\varepsilon}.$$

Для определения начального значения I воспользуемся формулой

$$\frac{d(S + I + R)}{dt} = 0. \quad (8)$$

Формула (8) следует из структуры системы SIR (путем сложения всех трех уравнений). Воспользовавшись формулой (8) получим выражение для связи начальных условий для переменных S , R и I

$$S(0) + I(0) + R(0) = 1. \quad (9)$$

Из уравнения (9) может быть получено начальное условие для переменной I

$$I(0) = 1 - \gamma\epsilon - e^{-\epsilon}.$$

Используя начальные значения переменных S и I можно определить значение гамильтониана

$$H = S(0) - \gamma \ln S(0) + I(0) = e^{-\epsilon} + \gamma\epsilon + 1 - \gamma\epsilon - e^{-\epsilon} = 1. \quad (10)$$

Если подставить полученное в формуле (10) значение гамильтониана в формулу (7), получим окончательное выражение для единственной формулы, к которой сводится система SIR благодаря ее гамильтоновости:

$$\frac{dP}{dt} = e^P - \gamma P - 1. \quad (11)$$

Перейдем обратно от переменной P к переменной S . Тогда формула (11) примет вид:

$$\frac{dS}{dt} = S(S - \gamma \ln S - 1) = f(S). \quad (12)$$

Модель SIR удалось преобразовать к одному уравнению (12), которое может быть решено методом разделения переменных. Это даст неявное аналитическое решение системы SIR:

$$F(S) = \int_S^{S_b} \frac{dS}{f(S)} = t. \quad (13)$$

Получение неявного решения служит отправной точкой на пути получения явного аналитического решения системы SIR. Для получения явного аналитического решения необходимо обратить неявное аналитическое решение $t = F(S)$. Этому посвящен следующий подраздел.

Построение явного аналитического решения методом теории возмущений

В предыдущем подразделе гамильтоновость системы SIR позволила получить ее решение в неявном виде (13). Задача данного раздела состоит в получении явного решения. Для получения явного аналитического решения необходимо найти способ обращения неявного решения.

В данном подразделе предлагается способ обращения неявного решения, использующий для этого само неявное решение. Можно сказать, что проводится «обращение без обращения». Для осуществления данного способа применяется вариант метода теории возмущений. Покажем, как работает теория возмущений и «обращение без обращения».

Предположим, что можно найти достаточно хорошее нулевое приближение $S_0(t)$ к точному решению $S(t)$. Тогда задача поиска решения $S(t)$ сведется к поиску разности $\delta S(t) = S(t) - S_0(t)$, которая предполагается малой. При этом уравнение для неявного решения примет вид

$$F(S_0 + \delta S) = t. \quad (14)$$

Теперь появляются два способа решения уравнения (14). Первый способ – обратить функцию F . Второй способ – разложить функцию F в ряд Тейлора около точки S_0 по переменной δS

$$F(S_0) + F'(S_0)\delta S + \frac{1}{2}F''(S_0)(\delta S)^2 + \dots = t. \quad (15)$$

Очевидно, что найти решение δS уравнения (15), удерживая только несколько главных слагаемых, значительно проще, чем обратить уравнение (14). Это и есть «обращение без обращения». Причем не обязательно удерживать только низшие степени δS в формуле (15). Можно построить систематическую процедуру решения с учетом любой степени δS . Для этого решение δS надо разложить в ряд по формальному малому параметру ε

$$\delta S = \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \varepsilon^3 S_3 + \dots \quad (16)$$

В итоге, подставив формулу (16) в формулу (15), получим окончательное уравнение теории возмущений

$$F(S_0) + F'(S_0)(\varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \varepsilon^3 S_3 + \dots) + \frac{F''(S_0)}{2}(\varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots)^2 + \frac{F'''(S_0)}{6}(\varepsilon S_1 + \dots)^3 + \dots = t. \quad (17)$$

Очевидно, что решить уравнение (17) несравненно проще, чем обращать уравнение (14). Для решения уравнения (17) осталось сгруппировать слагаемые по степеням ε . В первых трех порядках по ε получим следующие уравнения:

$$\varepsilon S_1 = f(S_0)(F(S_0) - t). \quad (18)$$

$$\varepsilon^2 S_2 = \frac{1}{2} f(S_0) f'(S_0) (F(S_0) - t)^2. \quad (19)$$

$$\varepsilon^3 S_3 = \frac{1}{6} (f(S_0) f'(S_0)^2 + f^2(S_0) f''(S_0)) (F(S_0) - t)^3. \quad (20)$$

С использованием формул (18)–(20) можно получить следующее аналитическое выражение для решения модели SIR:

$$S = S_0 + f(F - t) + \frac{1}{2} f f'(F - t)^2 + \frac{1}{6} (f(f')^2 + f^2 f'') (F - t)^3 + \dots \quad (21)$$

Это решение представляет собой сумму нулевого приближения и поправок к нему всех порядков. Эти поправки позволяют с любой желаемой точностью аппроксимировать решение модели SIR. В качестве нулевого приближения $S_0(t)$ можно выбрать решение логистического уравнения Мальтуса – Ферхюльста

$$\frac{dS_0}{dt} = \alpha(S_0 - \lambda)(S_0 - 1) = f_0. \quad (22)$$

Здесь параметр λ определяется из следующего уравнения:

$$f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1 - \gamma \ln \lambda) = 0.$$

Вследствие этого функция $f(S)$ и $f_0(S)$ имеют одинаковые нули в точках $S = 1$ и $S = \lambda$. При этом качественное поведение правых частей $f(S)$ и $f_0(S)$ уравнений (22) и (12) совпадает. Поэтому решение уравнения (22) имеет такое же качественное

поведение, как и решение модели SIR. Оно находится методом разделения переменных из уравнения (22) и имеет следующий вид:

$$S_0 = \frac{\lambda(1-S_b) + (S_b - \lambda)e^{-\alpha(1-\lambda)t}}{(1-S_b) + (S_b - \lambda)e^{-\alpha(1-\lambda)t}}.$$

Для окончательного определения вида решения системы SIR осталось найти явное аналитическое выражение для функции $F(S)$. Это выражение нельзя найти точно, но можно найти приближенное выражение с любой требуемой точностью. Этому будет посвящен следующий подраздел.

Аналитическая аппроксимация неявного решения динамического уравнения

В этом подразделе будет рассмотрен вопрос получения явного аналитического выражения для неявного решения (13) системы SIR. Получить явное аналитическое

выражение для функции $F = \int_S^{S_b} \frac{dS}{f(S)}$ невозможно. Однако можно получить ряд

приближенных выражений для функции F возрастающей степени сложности при увеличении точности приближения. Для этого используются рациональные функции

$\bar{f} = \frac{P_m(S)}{Q_n(S)}$, приближающие функцию $f = S(S-1-\gamma \ln S)$. Выбор в пользу рациональных функций (а, не, например, полиномов) сделан ввиду того, что выражение

$\frac{1}{\bar{f}}$, входящее в интеграл $\bar{F} = \int_S^{S_b} \frac{dS}{\bar{f}(S)}$, может быть разложено в некоторых случаях в

сумму $\frac{1}{\bar{f}} = \left(\frac{A}{S-a} + \frac{B}{S-b} + \frac{C}{S-c} + \dots \right),$

или сумму $\frac{1}{\bar{f}} = \left(\frac{A}{S(S-a)} + \frac{B}{S(S-b)} + \frac{C}{S(S-c)} + \dots \right).$

В этих суммах каждое слагаемое допускает интегрирование в явном виде

$$\bar{F} = \int \frac{dS}{\bar{f}} = \int dS \left(\frac{A}{S-a} + \frac{B}{S-b} + \frac{C}{S-c} + \dots \right),$$

или

$$\bar{F} = \int \frac{dS}{\bar{f}} = \int dS \left(\frac{A}{S(S-a)} + \frac{B}{S(S-b)} + \frac{C}{S(S-c)} + \dots \right).$$

Рассмотрим детали на примере использованной в работе аппроксимации

$$\bar{F} = \int \frac{dS}{\bar{f}} = \int dS \left(\frac{A}{S(S-1)} + \frac{B}{S(S-\lambda)} \right).$$

При такой аппроксимации функция $\bar{f}$ примет вид

$$\bar{f} = \frac{S(S-1)(S-\lambda)}{(A+B)S - (\lambda A + B)}.$$

Подгонка параметров A и B для наилучшей аппроксимации функции f функцией $\bar{f}$ приводит к следующему выражению для функции $\bar{F}$

$$\bar{F} = -\frac{1}{1-\gamma} \ln\left(\frac{1-S}{S}\right) \Big|_{S_0}^{S_b} - \frac{1}{\lambda-\gamma} \ln\left(\frac{S-\lambda}{S}\right) \Big|_{S_0}^{S_b}. \quad (23)$$

С учетом формул (21), (23) окончательное выражение для приближенного аналитического решения примет вид

$$S = S_0 + \bar{f}(\bar{F} - t) + \frac{1}{2} \bar{f}''(\bar{F} - t)^2. \quad (24)$$

Для выбранной в (23) функции $\bar{F}$ параметр $\alpha = -\frac{(\lambda - \gamma)}{(1 - \lambda)}$.

Получено явное приближенное аналитическое решение (24) уравнения (12), к которому сводится система SIR. При этом используются две первые поправки к нулевому приближению, позволяющие с достаточной точностью аппроксимировать решение уравнения (12).

Примечание: для проверки эффективности прогностического моделирования с применением компартментальной модели SIR в работе был также рассмотрен второй способ получения явного аналитического решения с использованием альтернативного метода построения ряда теории возмущений. Он отличается от рассмотренного выше способом построения поправок. При этом формула явного аналитического решения с учетом первых трех порядков имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \dots, \\ \bar{S}_1 &= f(S_0)(F(S_0) - t), \\ \bar{S}_2 &= f(S_0 + \bar{S}_1)(F(S_0 + \bar{S}_1) - t), \\ \bar{S}_3 &= f(S_0 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2)(F(S_0 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2) - t). \end{aligned}$$

Здесь S_0 – нулевое приближение, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$ – три первые поправки.

Поскольку в ходе предварительной проверки оба подхода (с использованием первых двух поправок) дают аналогичные результаты, окончательная проверка работоспособности предлагаемого в работе метода будет выполнена ниже с использованием первого способа (формула (24)).

Формула (24) будет использована далее для подготовки сценария с высокой точностью прогнозирования многоволновой динамики опасных вирусных заболеваний. Уравнение (24) описывает распространение одной волны инфекции. Для точного описания многоволновой динамики COVID-19 в Китае успешно применен на практике численный метод суперпозиции одноволновых решений [11].

В данной работе используется суперпозиция аналитических одноволновых решений, задаваемых формулой (24). В условиях реального времени метод реализуется путем постоянного отслеживания фактических данных с соответствующей донастройкой исходной модели по новым данным.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ ПРОВЕРКИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ МЕТОДА

На первом этапе аналитические результаты проверяются с использованием формулы (24) путем аппроксимации статистических данных по кумулятивному количеству заболевших COVID-19. Источник данных – официальные статистические данные по заболеваемости коронавирусом в г. Москве за период с 8.08.2023 по 14.01.2025 [26].

Представленные на рисунке 1 результаты проверки аппроксимационных возможностей метода позволяют наглядно убедиться, что полученная с использованием аналитического решения (24) аналитическая кривая позволяет описывать реальную многоволновую динамику инфекции с достаточной степенью точности. Для аппроксимации выбраны пять наиболее крупных пандемических волн COVID-19 в г. Москве за период с 8.08.2023 по 14.01.2025.

Получить достаточную точность аппроксимации этих пяти волн удалось с использованием девяти волн, заданных аналитическим решением (24) модели SIR. При этом для получения необходимой точности аппроксимации большинство отдельных волн пришлось описывать с помощью двух составляющих их суб-волн.

Точность аппроксимации, определенная методом MSPE (MSPE-Mean Squared Percentage Error /метод среднеквадратичной ошибки в процентах) составила 94.33 %. Указанная точность аппроксимации позволяет ее использовать для дальнейшей проверки прогностических возможностей предложенного метода.

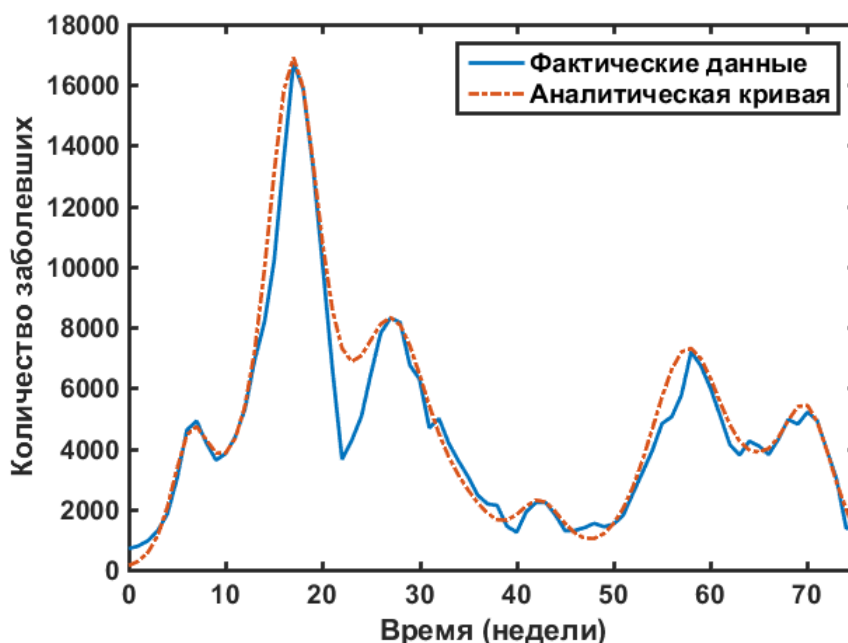


Рис. 1. Результаты аппроксимации пяти наиболее крупных волн за период с 8.08.2023 по 14.01.2025.

После получения достаточной точности аппроксимации, на втором этапе проверяются прогностические возможности метода. Для большей наглядности рассмотрим далее два возможных варианта прогнозирования с использованием аналитических результатов (24). Это позволит на конкретных примерах показать, как избежать ошибок при подготовке точного варианта прогнозирования.

Отсутствующая в чрезвычайных условиях, но использованная в данном исследовании возможность осуществления ретроспективного анализа, позволяет не только детально сравнить оба варианта прогнозирования, но и в определенной мере прояснить, почему у исследователей сформировались диаметрально противоположные мнения относительно прогностических возможностей компартментальных моделей.

Идея проверки метода прогнозирования состоит в следующем. По небольшому известному отрезку графика фактических данных, находящемуся в начале волны необходимо восстановить вид волны на максимально большом (по возможности) интервале. Поскольку в нашем случае известна подсказка – полный вид волны, по нему можно сразу оценить степень точности прогнозирования в зависимости от выбранного исследователем подхода.

В работе выполнено детальное сравнение двух вариантов прогнозирования на конкретном примере прогнозирования второй самой большой из пяти крупных волн, зафиксированных в г. Москве за период с 8.08.2023 по 14.01.2025. Результаты проверки прогностических возможностей предложенного в работе метода показаны на рисунках 2–5.

На рисунке 2 приведены результаты прогнозирования второй волны. В этом случае прогнозирования была сделана попытка аппроксимировать фактические данные по

кумулятивной численности заболевших с 10 по 13 неделю с помощью только одной аналитической одноволновой кривой, заданной формулой (24).

График справа от этого участка волны отражает полученный негативный результат прогнозирования. Из этой части графика видно, что положение максимума второй волны определяется со значительной ошибкой в пять недель, а его высота завышена более чем в два раза.

Это говорит о том, что попытка прогнозирования с помощью аппроксимации фактических данных одной аналитической одноволновой кривой в данном случае приводит к ошибочным результатам.

Такой результат может служить возможным объяснением мнения о бесполезности использования для прогнозирования компартментальных моделей [16]. Причина негативного результата может заключаться в возможном наличии малой суб-волны в составе прогнозируемой второй волны. Результат проверки этого предположения будет представлен ниже на рисунке 3.

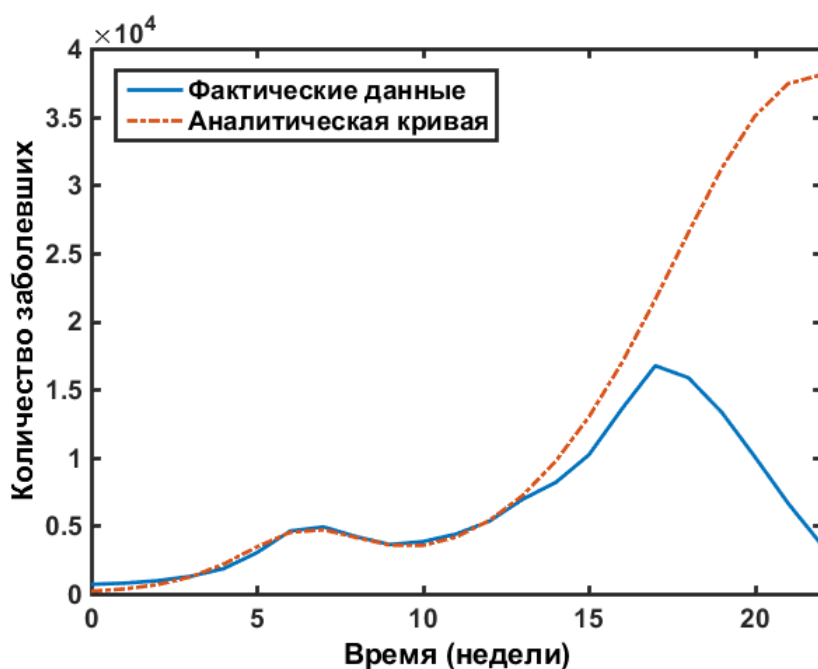


Рис. 2. Прогнозирование второй волны с использованием одной аналитической кривой.

На рисунке 3 представленный в работе метод используется для прогнозирования второй волны с учетом входящей в нее малой суб-волны (каждая из суб-волн описывается формулой (24)). В этом варианте прогнозирования фактические данные с 10 по 13 неделю аппроксимировались с помощью суперпозиции сразу двух одноволновых аналитических кривых.

Этот способ прогнозирования позволяет учесть влияние обеих волн. Результаты прогнозирования изменяются коренным образом в лучшую сторону, что подтверждает необходимость учитывать в реальных условиях возможное влияние на результаты не учтенной на рисунке 2 малой суб-волны.

Как видно из рисунка 3 (справа от отрезка с 10 по 13 неделю), получен точный вариант прогнозирования, который позволяет точно передать положение максимума волны и его высоту. Точность прогнозирования по методу MSPE составляет 91.35 %. Этот результат может служить возможным объяснением положительного мнения исследователей о приемлемых прогностических возможностях компартментальных моделей [11–13].

Результаты, представленные на рисунках 2 и 3 показывают, что с использованием аналитического решения одной и той же модели можно получить как ошибочный, так и

предложенный в работе точный результат в зависимости от выбранного варианта прогнозирования.

В реальных условиях пандемии для повышения надежности и эффективности результатов представляется необходимым проверять сразу оба варианта с дальнейшим отслеживанием тенденции поведения графика фактических данных и при его выходе за аппроксимационную область выбирать из двух вариантов более точный.

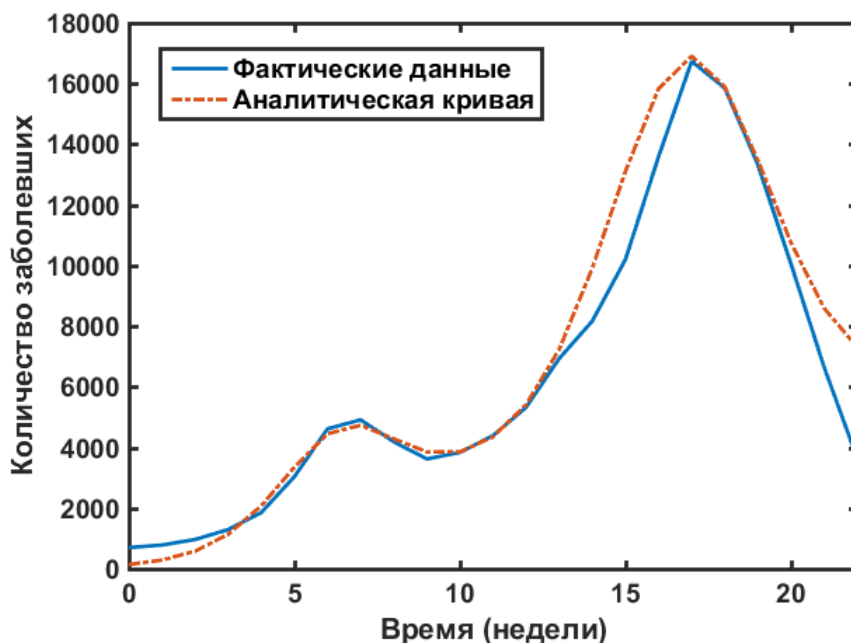


Рис. 3. Прогнозирование второй волны с использованием двух одноволновых решений.

На рисунке 4 показана большая из аналитических суб-волн, входящих во вторую волну. Она правильно передает положение максимума и его высоту для второй фактической волны и совсем не аппроксимирует ее на отрезке с 10 по 13 неделю.

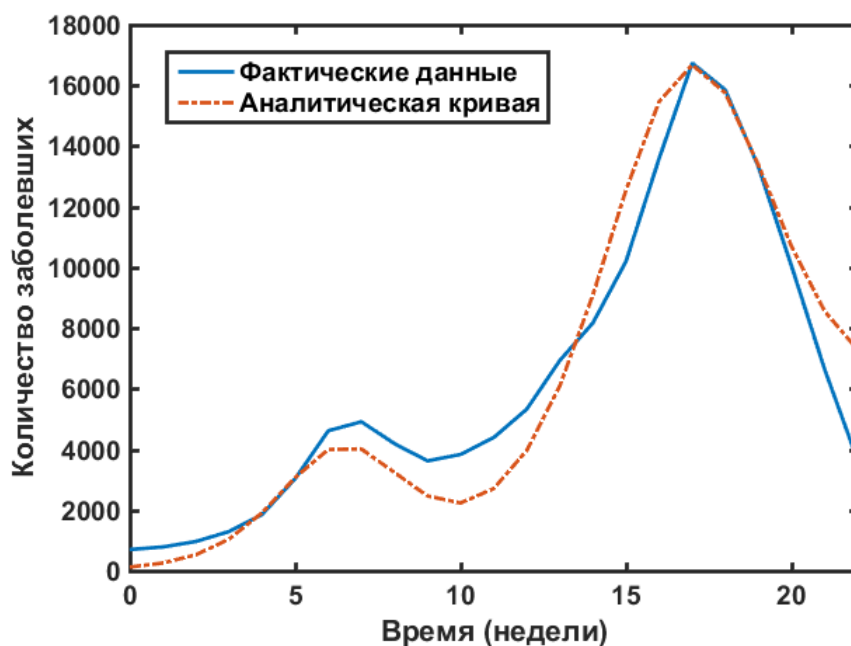


Рис. 4. График большей из суб-волн, входящих во вторую волну.

На рисунке 5 представлена меньшая из аналитических суб-волн, входящих во вторую волну. Она значительно меньше первой суб-волны, но оказывает значительное

влияние на результаты. Это обусловлено тем, что она находится в области экспоненциального роста большей суб-волны.

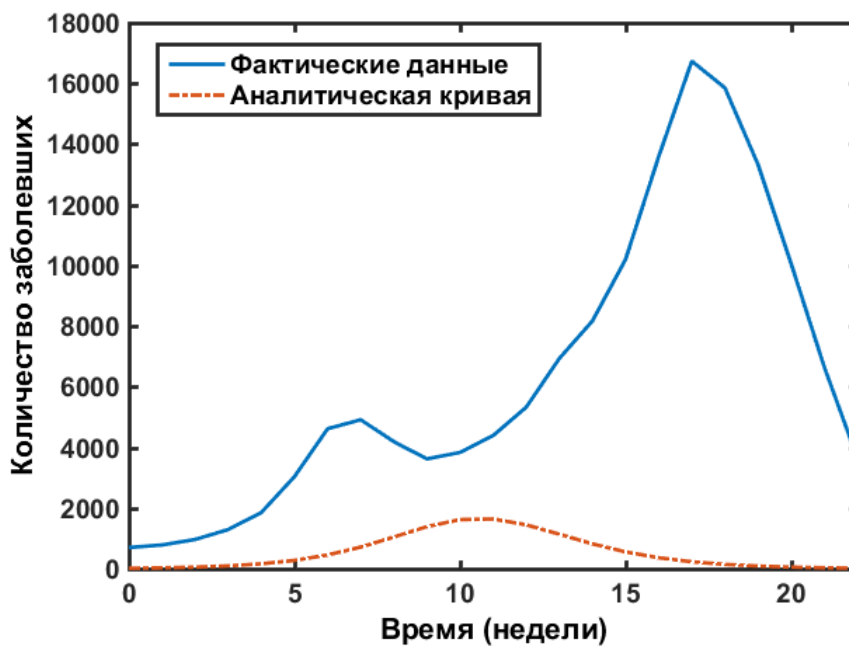


Рис. 5. График меньшей из суб-волн, входящей во вторую волну.

Следует отметить, что практическая осуществимость точного подхода обусловлена наличием полученного в работе аналитического решения, позволяющего строить решение сразу в виде двух волн.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе с помощью аналитического метода выполнено исследование особенностей и возможности повышения точности прогнозирования многоволновой динамики опасных вирусных заболеваний. Предложенный метод основан на использовании аналитического решения модели SIR, позволяющего сформулировать простые алгоритмы его применения, минимизировать ошибки при выборе вариантов прогнозирования.

Результаты исследования подтверждают возможность и целесообразность использования компартментальных моделей для описания и прогнозирования распространения опасных вирусных инфекций.

По сравнению с используемыми численными методами [11] наличие в предложенном методе явного аналитического решения позволяет своевременно определить главные черты многоволновой динамики распространения заболевания, дает возможность значительно упростить технологию настройки модели и сократить использование машинного времени. При сравнении с методами машинного обучения, результаты аналитического метода понятны, объяснимы и не требуют для подключения к процессу прогнозирования большой базы данных.

Перспективными являются исследования по созданию новых комплексных моделей прогнозирования, в которых объединятся возможности компартментальных моделей, высокотехнологичных ИИ-технологий с новыми знаниями о вирусах. Такие технологии должны обеспечивать постоянный мониторинг эпидемического процесса, автоматическое внесение поправок в исходную модель при любых изменениях направления динамики и базироваться на новом уровне раскодирования информации об эволюции, механизме функционирования и патогенном потенциале опасных вирусов. Будущее стоит за междисциплинарными исследованиями, в недрах которых

может зародиться более близкая к идеалу математическая модель прогнозирования опасных вирусных заболеваний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Estrada E. COVID-19 and SARS-CoV-2. Modeling the present, looking at the future. *Phys. Rep.* 2020. V. 869. P. 1–51. doi: [10.1016/j.physrep.2020.07.005](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.005)
2. Wu J. The application of SIR model in COVID-19. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Computing Innovation and Applied Physics*. Ed. Ghadi Y. 2023. V. 9. P. 38–44. (Theoretical and Natural Science Series). doi: [10.54254/2753-8818/9/20240709](https://doi.org/10.54254/2753-8818/9/20240709)
3. Bootsma M.C.J., Ferguson N.M. The effect of public health measures on the 1918 influenza pandemic in U.S. cities. *PNAS*. 2007. V. 104. № 18. P. 7588–7593. doi: [10.1073/pnas.0611071104](https://doi.org/10.1073/pnas.0611071104)
4. He D., Dushoff J., Day T., Ma J., Earn D.J.D. Mechanistic modelling of the three waves of the 1918 influenza pandemic. *Theoretical Ecology*. 2011. V. 4. P. 283–288. doi: [10.1007/s12080-011-0123-3](https://doi.org/10.1007/s12080-011-0123-3)
5. Harvey J., Chan B., Srivastava T., Zarebski A.E., Dłotko P., Błaszczuk P., Parkinson R.H., White L.J., Aguas R., Mahdi A. Epidemiological waves - types, drivers and modulators in the COVID-19 pandemic. *Heliyon*. 2023. V. 9. № 5. Article No. e16015. doi: [10.1016/j.heliyon.2023.e16015](https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e16015)
6. Wu K., Darcet D., Wang Q., Sornette D. Generalized logistic growth modeling of the COVID-19 outbreak: comparing the dynamics in the 29 provinces in China and in the rest of the world. *Nonlinear Dyn.* 2020. V. 101. № 3. P. 1561–1581. doi: [10.1007/s11071-020-05862-6](https://doi.org/10.1007/s11071-020-05862-6)
7. Akimkin V.G., Popova A.Yu., Ploskireva A.A., Ugleva S.V., Semenenko T.A., Pshenichnaya N.Yu., Ezhlova E.B., Letyushev A.N., Demina Yu.V., Kuzin S.N., et al. COVID-19: the evolution of the pandemic in Russia. Report I: manifestations of the COVID-19 epidemic process. *Journal of microbiology, epidemiology and immunobiology*. 2022. V. 99. № 3. P. 269–286 (in Russ.). doi: [10.36233/0372-9311-276](https://doi.org/10.36233/0372-9311-276)
8. Grinchuk P., Fisenko S. Power-law multi-wave model for COVID-19 propagation in countries with nonuniform population density. *Quantitative Biology*. 2022. V. 10. № 2. P. 150–156. doi: [10.15302/J-QB-022-0301](https://doi.org/10.15302/J-QB-022-0301)
9. Rocklöv J., Sjödin H. High population densities catalyse the spread of COVID-19. *J. Travel Med.* 2020. V. 27. № 3. Article No. taaa038. doi: [10.1093/jtm/taaa038](https://doi.org/10.1093/jtm/taaa038)
10. Xue J., Yabe T., Tsubouchi K., Ma J., Ukkusuri S. Multiwave COVID-19 prediction from social awareness using web search and mobility data. *Proceedings of the 28th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining USB*. Publisher: ACM. 2022. P. 4279–4289. doi: [10.1145/3534678.3539172](https://doi.org/10.1145/3534678.3539172)
11. Huang J., Zhao Y., Yan W., Lian X., Wang R., Chen B., Chen S. Multi-source dynamic ensemble prediction of infectious disease and application in COVID-19 case. *J. Thoracic Disease*. 2023. V. 15. № 7. P. 4040–4052. doi: [10.21037/jtd-23-234](https://doi.org/10.21037/jtd-23-234)
12. Rahmandad H., Xu R., Ghaffarzadegan N. Enhancing long-term forecasting: Learning from COVID-19 models. *PLoS Comput. Biol.* 2022. V. 18. № 5. Article No. e1010100. doi: [10.1371/journal.pcbi.1010100](https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1010100)
13. Baccaga D., Castagno P., Anta A.F., Sereno M. Enhancing COVID-19 forecasting precision through the integration of compartmental models, machine learning and variants. *Sci. Rep.* 2024. V. 14. № 1. Article No. 19220. doi: [10.1038/s41598-024-69660-5](https://doi.org/10.1038/s41598-024-69660-5)
14. Chharia A., Jeevan G., Jha R. A., Liu M., Berman J.M., Glorioso C. Accuracy of US CDC COVID-19 forecasting models. *Front. Public. Health*. 2024. V. 12. Article No. 1359368. doi: [10.3389/fpubh.2024.1359368](https://doi.org/10.3389/fpubh.2024.1359368)

15. Chharia A., Glorioso C. Researchers built dozens of COVID-19 forecasting models—did they actually help? *Medicalxpress*. 2024. URL: <https://medicalxpress.com/news/2024-07-built-dozens-covid.html> (accessed 06.11.2025).
16. Sudhakar T., Bhansali A., Walkington J., Puelz D. The disutility of compartmental model forecasts during the COVID-19 pandemic. *Front. Epidemiol.* 2024. V. 4. Article No. 1389617. doi: [10.3389/fepid.2024.1389617](https://doi.org/10.3389/fepid.2024.1389617)
17. Roubenoff E. How will COVID-19 persist in the future? Simulating future 2 dynamics of COVID-19 using an agent-based network model. *MedRxiv preprint*. 2023. 41 p. doi: [10.1101/2023.08.29.23294791](https://doi.org/10.1101/2023.08.29.23294791)
18. Goldschmidt P.G. At the end of every pandemic: Beginning a pandemic playbook to respond to the next. *Front. Public. Health.* 2022. V. 10. Article No. 838561. doi: [10.3389/fpubh.2022.838561](https://doi.org/10.3389/fpubh.2022.838561)
19. Glorioso C., Castiglione F., Oshinubi K., Chharia A., Barhak J. Lessons learned from modeling COVID-19: steps to take at the start of the next pandemic. *Preprints*. 2024. doi: [10.20944/preprints202411.2193.v1](https://doi.org/10.20944/preprints202411.2193.v1)
20. Ioannidis J.P.A., Cripps S., Tanner M.A. Forecasting for COVID-19 has failed. *Int. J. Forecast.* 2022. V. 38. № 2. P. 423–438. doi: [10.1016/j.ijforecast.2020.08.004](https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2020.08.004)
21. Castro M., Ares S., Cuesta J.A., Manrubia S. The turning point and end of an expanding epidemic cannot be precisely forecast. *PNAS*. 2020. V. 117. № 42. P. 26190–26196. doi: [10.1073/pnas.2007868117](https://doi.org/10.1073/pnas.2007868117)
22. Wilke C.O., Bergstrom C.T. Predicting an epidemic trajectory is difficult. *PNAS*. 2020. V. 117. № 46. P. 28549–28551. doi: [10.1073/pnas.2020200117](https://doi.org/10.1073/pnas.2020200117)
23. Grant A. Dynamics of COVID-19 epidemics: SEIR models underestimate peak infection rates and overestimate epidemic duration. *MedRxiv Preprint*. 2020. 14 p. doi: [10.1101/2020.04.02.20050674](https://doi.org/10.1101/2020.04.02.20050674)
24. *Data science and AI in the age of COVID-19. Reflections on the response of the UK's data science and AI community to the COVID-19 pandemic*. Eds. Von Borzyskowski I., Mateen B., Mazumder A., Wooldridge M. The Alan Turing Institute, 2021. P. 12–13. URL https://www.turing.ac.uk/sites/default/files/2021-06/data-science-and-ai-in-the-age-of-covid_full-report_2.pdf (accessed 06.11.2025).
25. Petersen E., Koopmans M., Go U., Hamer D.H., Petrosillo N., Castelli F., Storgaard M., Khalili S.A., Simonsen L. Comparing SARS-CoV-2 with SARS-CoV and influenza pandemics. *Lancet Infect. Dis.* 2020. V. 20. № 9. P. e238–e244. doi: [10.1016/S1473-3099\(20\)30484-9](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30484-9)
26. *Coronavirus in Moscow*. URL: <https://coronavirus-graph.ru/rossiya/moskva> (accessed 06.11.2025)/ (in Russ.)

Рукопись поступила в редакцию 18.07.2025.

Дата опубликования 18.11.2025.

===== MATHEMATICAL MODELING =====

Features of Prognostic Modeling of Multi-Wave Dynamics of Dangerous Viral Diseases

Bibik Yu.V.

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. To improve the accuracy of forecasting new dangerous viral diseases, we propose a data-validated analytical method based on an explicit analytical solution

to the original SIR model. The Hamiltonian nature of the model and the inclusion of amendments of any order in the solution enable a comprehensive, multifaceted analysis and timely assessment of the factors and risks of a pandemic. An exact solution significantly simplifies the model tuning process. To enhance the transparency of the method's results, various forecasting scenarios are considered using specific examples. Potential errors are identified, and methods for their elimination are proposed. An accurate forecasting scenario (with a 5-week forecast horizon) is developed. All analytical results are verified numerically and visually using official statistics on the cumulative number of COVID-19 cases in Moscow for the period from August 8, 2023, to January 14, 2025. Recommendations are provided for improving forecasting accuracy using the proposed method in real-world conditions. The method allows us to reduce the risks of inaccurate forecasts, reduce the cost of computer time, improve the accuracy of forecasting, the level of explainability of results, and their integration into interdisciplinary research programs.

Key words: *compartmental models, multi-wave dynamics, Hamiltonian, perturbation theory, approximation, forecasting*